UNIDAD V I I

OBJETIVO PARTICULAR

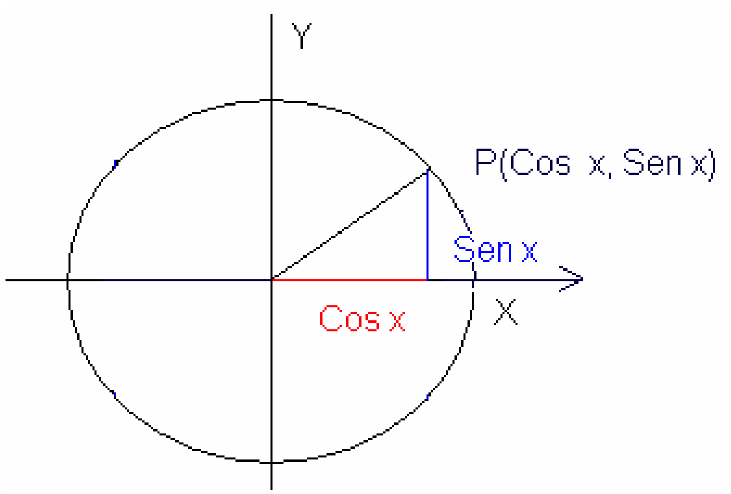
Al término de la unidad el alumno resolverá ecuaciones que involucren razones trigonométricas y analizara la solución de las mismas para ángulos entre 0º y 360º

74. Definición

Una ecuación trigonométrica es aquella en la que la incógnita a encontrar es el valor de uno o varios ángulos entre 0º y 360º, existen de primer y segundo grado al igual que en el algebra.

En esta unidad se requiere tener presente las habilidades algebraicas y las destrezas que se han adquirido en esta materia.

Antes de iniciar a resolver ecuaciones, es importante saber interpretar el o los resultados que se obtendrán. Para ello se hace necesario recordar y tener presente el círculo trigonométrico.



Si la solución de la ecuación es:

Sen A = $\frac{1}{2}$ al obtener con la calculadora $\text{Sen}^{-1}\frac{1}{2} = 30º$ esto es cierto pero existe otro valor que también debemos tener en cuenta ya que el seno es positivo en el primer cuadrante y es el de 150º.

Las siguientes graficas es importante que las tomes en cuenta:

Si el resultado es el seno positivo el resultado esta en primer y segundo cuadrante.

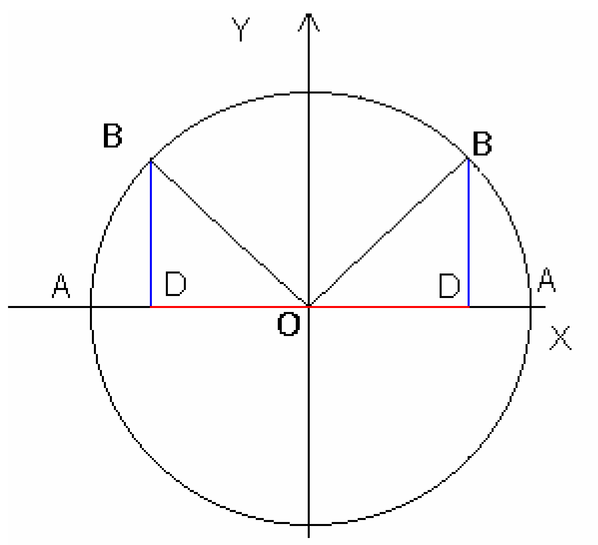


FIGURA 1

Si el resultado es seno negativo el resultado esta en tercer y cuarto cuadrante.

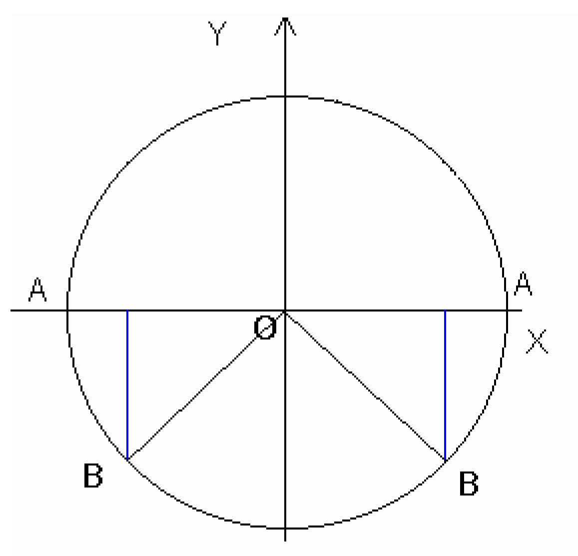


FIGURA 2

Ahora bien si el resultado es coseno positivo estará en primer y cuarto cuadrante:

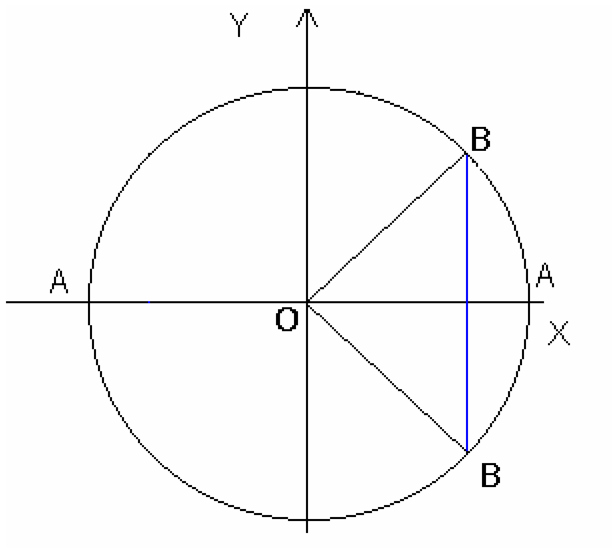


FIGURA 3

Y si el resultado es coseno negativo estará en el segundo y tercer cuadrante.

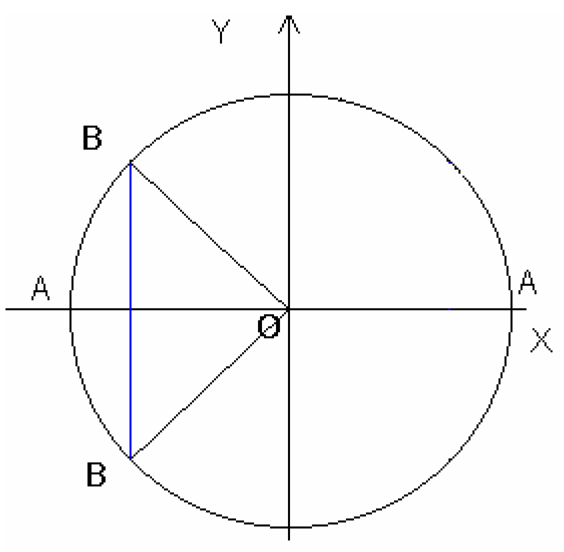


FIGURA 4

Cuando sea la solución tangente positiva el resultado estará en primer y segundo cuadrante.

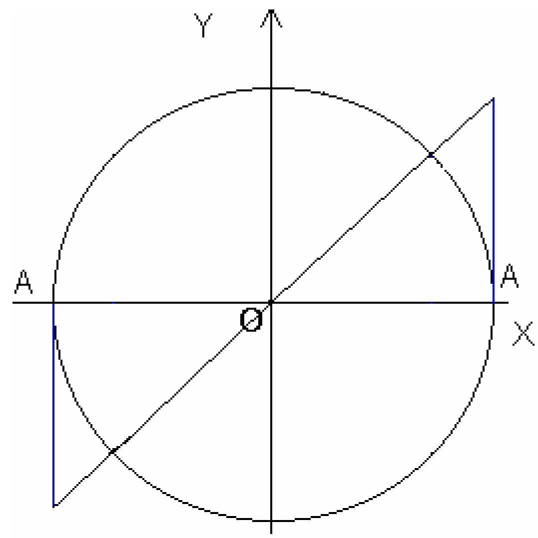


FIGURA 5

Y finalmente al ser tangente negativa la solución estará en segundo y cuarto cuadrante.

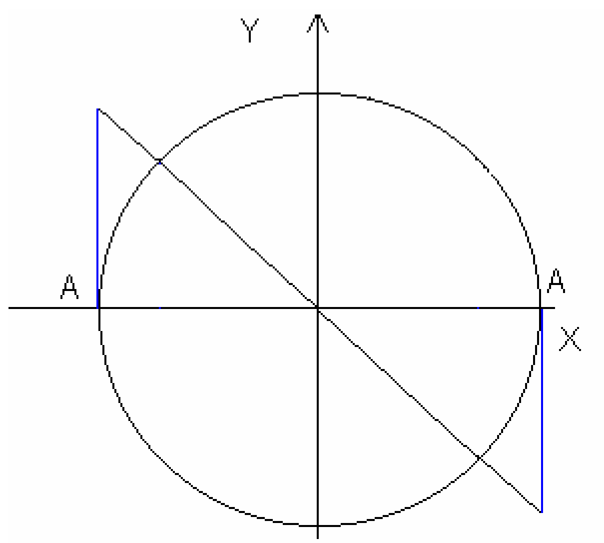


FIGURA 6

EJEMPLO 7.1

Dados las soluciones siguientes obtener todos los posibles valores de la incógnita entre el intervalo $0º \leq x < 360º$.

a) $\text{Cos}\, x = -\frac{1}{2}$

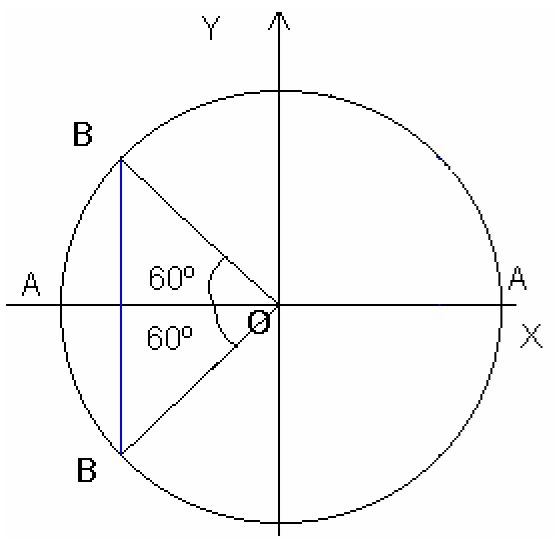
El ángulo en primer cuadrante cuyo valor es 0.5 es 60º, pero como el resultado es negativo, la calculadora solo nos da el primer valor.

Solución: $x = \cos^{-1} - 0.5$

Primera solución $x = 120º$

Segunda solución $x = 240º$

Grafica:



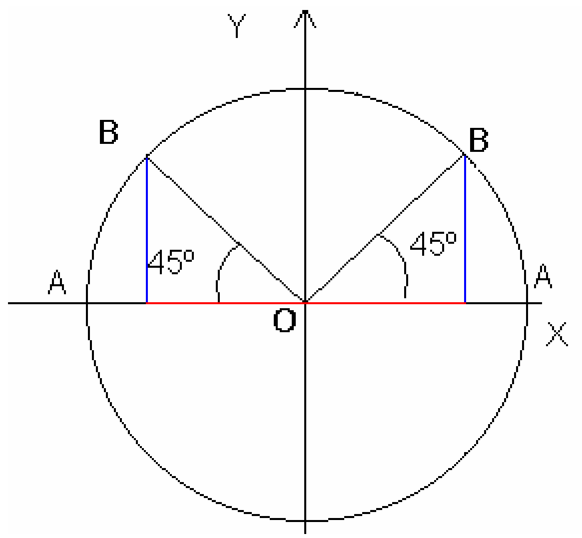
b) $\text{Sen}\, A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $\text{Sen}\, A = 0.7071$ El ángulo cuyo valor es 0.7071 es 45º, y como el seno es positivo en primer y segundo cuadrante.

Solución $A = \text{Sen}^{-1}\, 0.7071$

Primera solución 45º

Segunda solución 135º

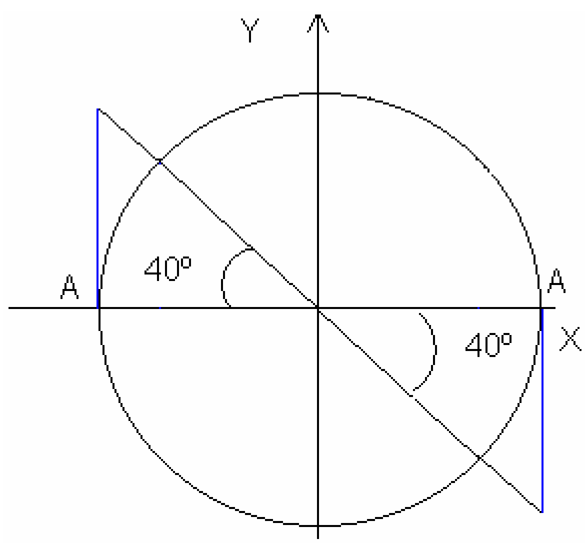
Grafica:



c) Tan B = - 0.8390, el ángulo cuyo valor – 0.8390 es 40º, pero la tangente es negativa en segundo y cuarto cuadrante.

Solución: B = Tan $^{-1}$ – 0.8390
Primera solución B = 140º
Segunda solución B = 320º

Grafica:



A continuación un recordatorio de solución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita:

Ecuación de primer grado:

$$
\begin{aligned}
6s-(3s-11) &= 47\\
6s-3s+11 &= 47\\
3s+11 &= 47\\
3s &= 47-11\\
3s &= 36\\
s &= \frac{36}{3}\\
s &= 12
\end{aligned}
$$

Ahora si en lugar de utilizar una letra se usa la palabra la solución será la misma:

$$
\begin{aligned}
6ese-(3ese-11) &= 47\\
6ese-3ese+11 &= 47\\
3ese+11 &= 47\\
3ese &= 47-11\\
3ese &= 36\\
ese &= \frac{36}{3}\\
ese &= 12
\end{aligned}
$$

Ecuación de segundo grado:

$$
\begin{aligned}
2x^2-18 &= 0\\
x^2 &= \frac{18}{2}\\
x &= \pm\sqrt{9}\\
x &= \pm 3
\end{aligned}
$$

Al utilizar palabras se tiene:

$$
\begin{aligned}
2equis^2-18 &= 0\\
equis^2 &= \frac{18}{2}\\
equis &= \pm\sqrt{9}\\
equis &= \pm 3
\end{aligned}
$$

75. Solución mediante operaciones algebraicas.

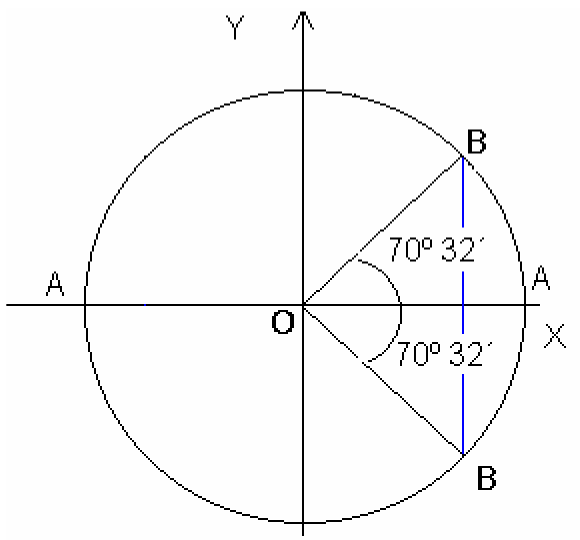
En este tema se tiene solo una función trigonométrica como incógnita o variable.

EJEMPLO 7.2

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas y obtener todos los posibles valores de la incógnita entre el intervalo $0º \leq x < 360º$.

$$\begin{aligned} 3\cos x - 1 &= 0 \\ 3\cos x &= 1 \\ \cos x &= \frac{1}{3} \\ x &= \cos^{-1} 0.333 \\ x &= 70º\,32' \quad \text{o} \\ x &= 289º\,28' \end{aligned}$$

Grafica:



Al igual que en las ecuaciones algebraicas se realizo una comprobación, en las trigonométricas también se realiza.

$$\begin{aligned} 3\cos x - 1 &= 0 \\ 3\cos 70º\,32' - 1 &= 0 \\ 3(0.3333) - 1 &= 0 \\ 0.9999 - 1 &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

con el segundo valor

$$\begin{aligned} 3\cos 289º\,28' &= 0 \\ 3(0.3333) - 1 &= 0 \\ 0.9999 - 1 &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.3

$$4\cos^2 A = 3$$

$$\cos^2 A = \frac{3}{4}$$

$$\cos A = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \cos^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

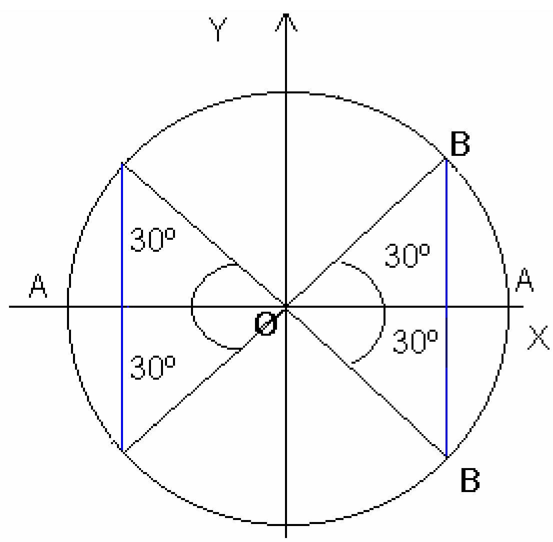
$$A = 30º \text{ o } 330º$$

$$A = \cos^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 150º \text{ o } 210º$$

Recordar que toda raíz cuadrada puede ser positiva o negativa de ahí el doble signo, por lo tanto existen dos soluciones para el coseno positivo y dos para el negativo.

Grafica:



Comprobación:

$$4\,\text{Cos}^2\, 30º = 3$$

$$4\,(0.866)^2 = 3$$

$$4\,(0.75) = 3$$

$$3 \equiv 3$$

$$\begin{aligned} 4\,\text{Cos}^2\, 330^{\circ} &= 3 \\ 4\,(0.866)^2 &= 3 \\ 4\,(0.75) &= 3 \\ 3 &\equiv 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\,\text{Cos}^2\, 150^{\circ} &= 3 \\ 4\,(-\,0.866)^2 &= 3 \\ 4\,(0.75) &= 3 \\ 3 &\equiv 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\,\text{Cos}^2\, 210^{\circ} &= 3 \\ 4\,(-\,0.866)^2 &= 3 \\ 4\,(0.75) &= 3 \\ 3 &\equiv 3 \end{aligned}$$

76. Solución mediante reducciones trigonométricas.

En este tipo de ecuaciones, en la inicial, existe más de una función por lo que debemos utilizar las identidades, se sugiere para la solución de estas ecuaciones obtener una equivalente con una sola función.

EJEMPLO 7.4

$$\begin{aligned} 3\tan A + 3\cot A &= 4\sqrt{3} \\ 3\tan A + 3\left(\frac{1}{\tan A}\right) &= 4\sqrt{3} \\ 3\tan A + \frac{3}{\tan A} &= 4\sqrt{3} \\ 3\tan^2 + 3 &= 4\sqrt{3}\tan A \\ 3\tan^2 - 4\sqrt{3}\tan A + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación equivalente y es del tipo cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que se soluciona por el método de formula general donde $a = 3$, $b = -4\sqrt{3}$, $c = 3$ y $x = \tan A$

Utilizando la formula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\tan A = \frac{-\left(-4\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4\,(3)(3)}}{2(3)}$$

$$\tan A = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 36}}{6}$$

$$\tan A = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} \quad ; \quad \sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan A_1 = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$A_1 = \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$A_1 = 60^{\circ} \ \text{o} \ 240^{\circ}$$

$$\tan A_2 = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_2 = \tan^{-1} - 0.5773$$

$$A_2 = 330^{\circ} \ \text{o} \ 120^{\circ}$$

Comprobación:

$$3\tan 60^{\circ} + 3\cot 60^{\circ} = 4\sqrt{3}$$
$$3\left(1.732\right) + 3\left(0.5773\right) = 4\,(1.732)$$
$$5.196 + 1.732 = 6.928$$
$$6.928 \equiv 6.928$$

$$3\tan 240^{\circ} + 3\cot 240^{\circ} = 4\sqrt{3}$$
$$3\left(1.732\right) + 3\left(0.5773\right) = 4\,(1.732)$$
$$5.196 + 1.732 = 6.928$$
$$6.928 \equiv 6.928$$

$$\begin{aligned} 3\tan 330^\circ + 3\cot 60^\circ &= -4\sqrt{3} \\ 3(-0.5773) + 3(-1.732) &= -4\,(1.732) \\ -1.732 - 5.196 &= -6.928 \\ -6.928 &\equiv -6.928 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\tan 120^\circ + 3\cot 120^\circ &= -4\sqrt{3} \\ 3(-1.732) + 3(-0.5773) &= -4\,(1.732) \\ -5.196 - 1.732 &= -6.928 \\ -6.928 &\equiv -6.928 \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.1

100. $\sqrt{2\,\text{sen}\,B - 1} = 0$
101. $2\ \text{sen}\,Q + \cos^2 Q = \frac{7}{4}$
102. $4\,\text{sen}^3 R - \text{sen}\,R = 0$
103. $\csc E + \cot E = \sqrt{3}$
104. $2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3 = 0$
105. $\tan R = \cot^2 R$
106. $2\,\text{sen}^2 A = -3\cos A$
107. $4\tan^2 x - 3\sec^2 x = 0$
108. $2\,\text{sen}\,K - \csc K + \cot K = 0$
109. $\cos^2 x + 3\,\text{sen}\,x = 3$

METODOLOGIA

La parte teórica del curso será expuesta por el profesor con algunas investigaciones por parte del alumno. Los aspectos prácticos serán cubiertos por el alumno con ejercicios en cada una de las unidades como un medio de medir el conocimiento, comprensión, aplicación y análisis de los contenidos.

CRITERIOS DE EVALUACION

Se realizaran exámenes al término de cada unidad, debiendo el alumno acreditar todas con una calificación mínima de seis (6).

Al finalizar el curso si aprobó todas las unidades, la calificación final será el promedio aritmético.

Si reprueba una, dos o tres unidades, tendrá oportunidad de acreditarla (s) al final en un examen de recuperación.

En caso de ser más de tres unidades o reprobar alguna de recuperación, para acreditar la materia el alumno podrá presentar un examen extraordinario en el periodo establecido para ello; éste contendrá TODAS las unidades del programa.

BIBLIOGRAFIA

1. LANDAVERDE, F. de J. 1997 *Geometría*. Progreso; México.
2. HEMMERLING, E.M. 2002 *Geometría Elemental,* Limusa; México.
3. LEITHOLD, Louis, 2003. *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* Oxford, University Press; México.
4. BALDOR, Aurelio. 2001. *Trigonometría,* Publicaciones Cultural S.A. de C. V., Décima novena reimpresión; México.
5. SMITH STANLEY A., 1998. *Algebra Trigonometría y Geometría Analítica,* Addison Wesley Logman de México S.A. de C. V.
6. ANFOSSI, A., y FLORES MEYER, M. A. 2000. *Trigonometría Rectilínea,* Progreso; México.
7. NILES N. O. 2000. *Trigonometría Plana.* Limusa; México.
8. AYRES, F. Jr., y MOYER, R. E. 1990. *Trigonometría.* McGraw-Hill (Serie Schaum); México.