UNIDAD VI

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de esta unidad, el alumno comprobará identidades trigonométricas, utilizando las formulas fundamentales, de la suma de dos ángulos y del ángulo doble.

1. Definición

Una definición de identidad de acuerdo al diccionario de la Real Academia es: *una relación entre dos o más objetos y/o elementos que son idénticos.*

En matemáticas se tienen identidades aritméticas, algebraicas y trigonométricas. Para los tres casos se debe tener un conocimiento básico de cada área de la matemática para comprender la identidad, pero siempre es un caso particular de una igualdad a la que se da el nombre de *absoluta*.

Una expresión aritmética es:

Ejemplo 6.1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$$

Donde si se ejecuta la operación indicada en ambos miembros de la igualdad y aplicando las propiedades aritméticas se tiene:

$$\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{3}{4}\equiv\frac{3}{4}$$

Si la expresión anterior se escribe con palabras se tiene:

Ejemplo 6.2

$$\frac{\text{uno}}{\text{dos}}+\frac{\text{uno}}{\text{cuatro}}=\frac{\text{dos}}{\text{cuatro}}+\frac{\text{uno}}{\text{cuatro}}$$
$$\frac{\text{dos}+\text{uno}}{\text{cuatro}}=\frac{\text{tres}}{\text{cuatro}}$$
$$\frac{\text{tres}}{\text{cuatro}}\equiv\frac{\text{tres}}{\text{cuatro}}$$

NOTA:

Para recordar el tema de fracciones puedes consultar los apuntes del curso propedéutico.

De igual forma se tiene en álgebra, identidades en las que se hace necesario el conocimiento básico de factorización y/o productos notables, como se puede observar en la siguiente expresión:

Ejemplo 6.3

$$\frac{a^2-1}{a+1} = a - 1$$

$$\frac{(a+1)(a-1)}{a+1} = a - 1$$

$$a - 1 \equiv a - 1$$

Fue necesario recordar la factorización de $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, con esto se reemplaza y se simplifica la fracción del lado izquierdo de la expresión y así se verifica que ambos miembros son idénticos.

NOTA:

Para recordar factorización consulta tus notas de algebra de primer semestre.

2. Identidades fundamentales

Para la trigonometría es necesario tener en cuenta los valores y conocimientos de las funciones básicas como lo son la función seno, coseno, tangente, y sus inversas:

2.1 Reciprocas

$$\text{Sen} = \frac{1}{\text{Csc}}$$

$$\text{Cos} = \frac{1}{\text{Sec}}$$

$$\text{Tan} = \frac{\text{Sen}}{\text{Cos}}$$

$$\text{Cot} = \frac{\text{Cos}}{\text{Sen}}$$

$$\text{Sec} = \frac{1}{\text{Cos}}$$

$$\text{Csc} = \frac{1}{\text{Sen}}$$

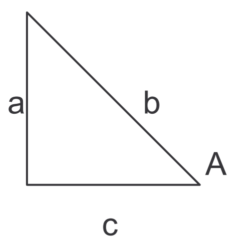
2.2 Pitagóricas.

1. $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

2. $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$

3. $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

Estos resultados se pueden obtener a partir del análisis de un triángulo rectángulo y las definiciones de cada una de las funciones trigonométricas involucradas:



$$\text{sen } A = \frac{a}{b}, \qquad \cos A = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \cos^2 A = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2}$$

Por Pitágoras: $a^2 + c^2 = b^2$, por lo que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = \frac{b^2}{b^2}$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1. \ (1)$$

Se deja al estudiante la obtención de las fórmulas (**2**) y (**3**).

2.3 Forma de cociente:

Por definición de las funciones trigonométricas Tan y Cot, y con el auxilio del círculo trigonométrico se tiene:

4. $\tan A = \dfrac{\text{sen } A}{\cos A}$

5. $\cot A = \dfrac{\cos A}{\text{sen } A}$

2.4 Ejercicios de comprobación

Teniendo las identidades anteriores y el concepto de las funciones básicas e inversas de la trigonometría se puede trabajar con ellas en las igualdades, determinando si son identidades o no.

No existe un procedimiento básico en el cual la trigonometría resuelva o explique cual es el método para resolver una identidad trigonométrica. Ya que esto depende del conocimiento y destreza de cada persona para resolver cualquier problema.

Sin embargo la comprobación de identidades contribuye a que el alumno tenga dominio sobre las relaciones fundamentales y al mismo tiempo recuerde las operaciones aritméticas y algebraicas; las diversas técnicas de comprobación serán de utilidad en cursos posteriores. Una recomendación es trabajar con el miembro que a simple vista nos parezca más complicado y realizar los reemplazos necesarios de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante en función del ***seno*** y ***coseno,*** y después continuar con las operaciones indicadas.

Ejemplo 6.4

Comprobar que la siguiente expresión es una identidad verídica:

$$\frac{\text{sen }A}{\text{csc }A}+\frac{\cos A}{\sec A}=1$$

Es recomendable ubicar el signo de igualdad en medio de la línea principal de la fracción.

Reemplazando a Csc A y Sec A de las funciones reciprocas se tiene:

$$\frac{\text{sen }A}{\dfrac{1}{\text{sen }A}}+\frac{\cos A}{\dfrac{1}{\cos A}}=1$$

En el primer miembro hay una división de fracciones, el numerador que es entero se representa como una fracción de denominador ***uno***:

$$\frac{\dfrac{\text{sen }A}{1}}{\dfrac{1}{\text{sen }A}}+\frac{\dfrac{\cos A}{1}}{\dfrac{1}{\cos A}}=1$$

Se realiza la división y se obtiene:

$$\frac{(\text{Sen } A)(\text{Sen } A)}{1} + \frac{(\text{Cos } A)(\text{Cos } A)}{1} = 1$$

$$\text{Sen}^2 A + \text{Cos}^2 A = 1$$

Reemplazando de la identidad pitagórica **(1)** se tiene que:

$$\mathbf{1 \equiv 1}$$

Por lo tanto es una identidad.

Ejemplo 6.5

Comprobar que la siguiente expresión es una identidad::

$$\tan A + \cot A = (\sec A)(\csc A)$$

Inicialmente se reemplaza, el primer miembro de la igualdad con las identidades de forma de cociente (**4**) y (**5**).

$$\frac{\text{sen } A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\text{sen } A} = (\sec A)(\csc A)$$

Se realiza la operación buscando el m.c.m. de los denominadores que es: (Sen A) (Cos A), se obtiene:

$$\frac{\text{sen}^2 A + \cos^2 A}{(\text{sen } A)(\cos A)} = (\sec A)(\csc A)$$

Algunos autores eliminan los paréntesis que nos indican multiplicación y reemplaza la identidad Pitagórica (**1**) del numerador, se tiene:

$$\frac{1}{\text{sen } A \ \cos A} = \sec A \csc A$$

Se separa el denominador en forma de multiplicación y se aplican las funciones inversas para obtener:

$$\left(\frac{1}{\text{sen } A}\right)\left(\frac{1}{\cos A}\right) = \sec A \ \csc A$$

$$\csc A \sec A \equiv \sec A \csc A$$

Así queda demostrado que la igualdad anterior es una identidad.

Otra alternativa a partir del paso donde se aplican las funciones inversas se trabaja con el segundo miembro realizando los reemplazos necesarios, como a continuación se hace:

$$\text{Ctg A Csc A} = \frac{\text{Csc A} + \text{Cot A}}{\text{Sen A} + \text{Tan A}}$$

$$\left(\frac{1}{\text{sen A}}\right)\left(\frac{1}{\cos\text{ A}}\right) = \sec\text{ A}\ \ \csc\text{ A}$$

$$\left(\frac{1}{\text{sen A}}\right)\left(\frac{1}{\cos\text{ A}}\right) \equiv \left(\frac{1}{\text{sen A}}\right)\left(\frac{1}{\cos\text{ A}}\right)$$

EJERCICIO 6.1.

Verificar si las expresiones siguientes son identidades o no:

74. $\text{Sen}^2\ \text{B}(1 + \text{Cot}^2\ \text{B}) = 1.$

75. $\dfrac{2\ \text{Cos}\,\alpha\ (1 - \text{Cos}^2\,\alpha)}{2\ \text{Sen}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha} = \text{Sen}\,\alpha$

76. $\dfrac{\text{Csc A} + \text{Cot A}}{\text{Sen A} + \text{Tan A}} = (\text{Csc A})(\text{Cot A})$

77. $1 + \dfrac{1}{\text{Tan A}} = \dfrac{\text{Sen A} + \text{Cos A}}{\text{Sen A}}$

78. $1 = \text{Cos}^2\ \text{M}(1 + \text{Tan}^2\ \text{M})$

79. $\text{Sen E} = \dfrac{\text{Cos E}}{\text{Cot E}}$

80. $\text{Ctg A Csc} = \dfrac{\text{Csc A} + \text{Cot A}}{\text{Sen A} + \text{Tan A}}$

81. $\text{Sec B} - \text{Tan B} = \dfrac{\text{Cos B}}{1 + \text{Sen B}}$

82. $\dfrac{\text{Sen X}}{\text{Csc X}} + \dfrac{\text{Cos X}}{\text{Sec X}} = 1$

83. $\dfrac{\text{Tan F}}{\text{Sen F}} = \text{Sec F}$

84. $\text{Sen Q} = \dfrac{\text{Sec Q}}{\text{Tan Q} + \text{Cot Q}}$

85. $\text{Cos}^2\ \text{P} = \text{Sen}^2\ \text{P}(1 - \text{Csc}^2\ \text{P})$

86. $2\tan\text{ W} + 1 = \dfrac{\cos\text{ W} + 2\ \text{sen W}}{\cos\text{ W}}$

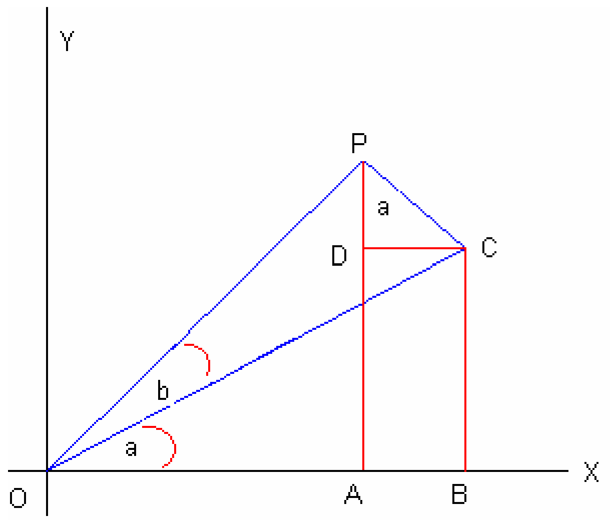
87. $\dfrac{1}{\tan^2\text{ V}} - \cos^2\text{ V} = \cos^2\text{ V} * \cot^2\text{ V}$

88. $\cot^2\text{ R}(1 + \tan^2\text{ R}) = \csc^2\text{ R}$

3. *Fórmulas de la suma de dos ángulos:*

3.1 Deducción de fórmulas.

Las funciones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos se deducen con el auxilio de la siguiente figura, donde por construcción se encuentran tres triángulos rectángulos que son: ***OBC***, ***CDP*** y ***OCP***, y los ángulos "***a***" y "***b***" son adyacentes asimismo hay cuatro rectas perpendiculares entre si **PA** $\perp$ **OB**, **PC** $\perp$ **OC**, **DC** $\perp$ **PA**, **CB** $\perp$ **OB**, y finalmente el ángulo "**a**" es igual a ángulo **DPC**, por tener sus lados respectivamente perpendiculares.



De acuerdo a la definición de Seno se tiene que:

$$\text{Sen }(a+b) = \text{Sen AOP} = \frac{AP}{OP} \qquad (1)$$

$$\text{Cos }(a+b) = \text{Cos AOP} = \frac{OA}{OP} \qquad (2)$$

En la figura se observa que los segmentos:

$$AP = AD + DP = BC + DP$$

Se sustituye en la (1) lo anterior y se tiene:

$$\text{Sen }(a+b) = \frac{AP}{OP} = \frac{BC + DP}{OP} \qquad (3)$$

Y de las definiciones de las funciones al despejar se tiene:

$$BC = OC \ \text{Sen } a \quad (p)$$
$$DP = PC \ \text{Cos } a \quad (q)$$
$$OC = OP \ \text{Cos } b \quad (r)$$
$$PC = OP \ \text{Sen } b \quad (s)$$

Entonces se reemplaza "OC" y "PC" por "**r**" y "**s**", en "**p**" y "**q**", y se tiene:

$$BC = OP \ \text{Sen } a \ \text{Cos } b \quad (4)$$
$$DP = OP \ \text{Sen } b \ \text{Cos } a \quad (5)$$

Al reemplazar las anteriores (4) y (5) en la expresión (3) se tiene:

$$\text{Sen } (a+b) = \frac{OP \ \text{Sen } a \ \text{Cos } b + OP \ \text{Sen } b \ \text{Cos } a}{OP}$$

Al separar el numerador y simplificar la fracción la expresión:

$$\text{Sen } (a+b) = \frac{OP \ \text{Sen } a \ \text{Cos } b}{OP} + \frac{OP \ \text{Sen } b \ \text{Cos } a}{OP}$$

Se obtiene:

$$\mathbf{Sen\ (a + b) = Sen\ a\ \ Cos\ b\ +\ Sen\ b\ \ Cos\ a}$$

Tomando en cuenta las mismas consideraciones para el Coseno de la suma de "**a**" y "**b**":

$$\text{Cos}(a+b) = \frac{OA}{OP}$$
$$= \frac{OB - AB}{OP}$$
$$= \frac{OB - DC}{OP} \qquad (6)$$

De la figura y por definición se obtiene:

$$OB = OC \ \text{Cos } a$$
$$OC = OP \ \text{Cos } b$$
$$DC = PC \ \text{Sen } a$$
$$PC = OP \ \text{Sen } b$$

Al reemplazar en (6) y realizar la factorización y simplificación correspondiente se tiene:

Cos (a + b) = Cos a Cos b — Sen a Sen b

De las identidades de forma de cociente se sabe que:

$$\text{Tan} = \frac{\text{Sen}}{\text{Cos}}$$

Por lo tanto:

$$\text{Tan}\ (a + b) = \frac{\text{Sen a Cos b} + \text{Sen b Cos a}}{\text{Cos a Cos b} + \text{Sen a Sen b}}$$

Otra forma de presentar la expresión anterior es dividir al numerador y denominador por la misma cantidad para que no se altere en su segundo miembro y al realizar las simplificaciones correspondientes:

$$\text{Tan}\ (a+b) = \frac{\text{Tan a} + \text{Tan b}}{1 - \text{Tan a Tan b}}$$

El ángulo **(a – b)** se considera como **a + (-b)** y como **- b** es un ángulo de 4° cuadrante.

$$\text{Cos}\ (-b) = \text{Cos b} \qquad \text{y}$$
$$\text{Sen}\ (-b) = -\text{Sen b}$$

Al reemplazar en las formulas antes vistas queda:

$$\text{Sen}\ (a - b) = \text{Sen a Cos b} - \text{Cos a Sen b}$$
$$\text{Cos}\ (a - b) = \text{Cos a Cos b} + \text{Sen a Sen b}$$
$$\text{Tan}\ (a - b) = \frac{\text{Tan a} - \text{Tan b}}{1 + \text{Tan a Tan b}}$$

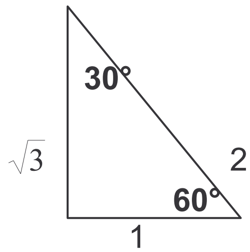
3.2 Ejercicios de comprobación:

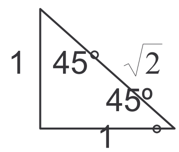
EJEMPLO 6.2

Expresar y calcular las funciones de los siguientes ángulos en términos de los ángulos de 30°, 45° o 60°, con el auxilio de la calculadora realizar las operaciones indicadas y comparar los resultados directos de la función:

a) Sen 75° = Sen (45° + 30°)
b) Cos 75° = Cos (45° + 30°)
c) Tan 75° = Tan (45° + 30°)

Al recordar las funciones de los ángulos particulares vistos en la unidad III





Soluciones:

a)

$$\operatorname{Sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{Sen} 45^\circ \ \operatorname{Cos}30^\circ + \operatorname{Cos}45^\circ \ \operatorname{Sen} 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

b)

$$\operatorname{Cos}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{Cos} 45^\circ \ \operatorname{Cos}30^\circ - \operatorname{Sen} 45^\circ \ \operatorname{Sen}30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{Tan}(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\operatorname{Tan} 45^\circ + \operatorname{Tan} 30^\circ}{1 - \operatorname{Tan} 45^\circ \operatorname{Tan} 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}$$

c) $$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

3.3 Ejercicios de aplicación:

EJERCICIO 6.2

89. Con el auxilio de las funciones de los ángulos particulares encuentre los valores del seno, coseno y tangente de 15°, mediante 15° = 45° - 30°
90. Con el auxilio de las funciones de los ángulos particulares encuentre los valores del seno, coseno y tangente de 15°, mediante 15° = 60° - 45°
91. Con el auxilio de las funciones de los ángulos particulares encuentre los valores del seno, coseno y tangente de 105°, mediante 105° = 60° + 45°.

Verificar si las expresiones siguientes son o no, identidades.

92. $\dfrac{\operatorname{Cos}(A - B)}{\operatorname{Cos} A \operatorname{Sen} B} = \operatorname{Cot} B + \operatorname{Tan} A$
93. $\operatorname{Cos}(x + y) \operatorname{Sec} y = \operatorname{Sen} x \,(\operatorname{Cot} x \operatorname{Tan} y)$
94. $\dfrac{\operatorname{Cos}(x - y) - \operatorname{Cos}(x + y)}{\operatorname{Cos} x \operatorname{Sen} y} = 2 \operatorname{Tan} x$
95. $\dfrac{\operatorname{Cos}(A + B)}{\operatorname{Sen} A \operatorname{Cos} B} = \operatorname{Cos} A\,(\operatorname{Csc} A - \operatorname{Sec} A \operatorname{Tan} B)$
96. $\operatorname{Tan}(x - y) + \operatorname{Tan} y = \dfrac{\operatorname{Sen} x \operatorname{Sec} y}{\operatorname{Cos}(x - y)}$

97. $$\frac{\text{Cot } y}{\text{Tan }(x - y)} - 1 = \frac{\text{Cos } x \ \ \text{Csc } y}{\text{Sen }(x - y)}$$

4.- Fórmulas del ángulo doble

4.1 Deducción de formulas.

Para obtener las formulas del ángulo doble se hace con las formulas anteriores haciendo "***b*** = ***a***"

$$\text{Sen } 2A = \text{Sen } (a + a) = \text{SenA CosA} + \text{SenA CosA}$$

Al reducir términos semejantes:

$$\text{Sen } 2A = 2 \text{ SenA CosA}$$

Para el Coseno se procede de igual forma:

$$\begin{aligned} \text{Cos } 2A &= \text{Cos } (a + a) \\ &= \text{CosA CosA} - \text{SenA SenA} \end{aligned}$$

Al realizar la operación indicada en el segundo miembro:

$$\text{Sen } 2A = \text{Cos}^2 A - \text{Sen}^2 A$$

Y finalmente para la tangente

$$\begin{aligned} \text{Tan } 2A &= \text{Tan } (a + a) \\ &= \frac{\text{Tan } A + \text{Tan } A}{1 - \text{Tan } A \text{ Tan } A} \end{aligned}$$

Al realizar las operaciones indicadas:

$$\text{Tan } 2A = \frac{2 \text{ Tan } A}{1 - \text{Tan}^2 A}$$

4.2 Ejercicios de comprobación

EJEMPLO 6.6

Calcular Sen 90°, Cos 90° y Tan 90°, considerando 90° = 45° + 45°

$$\begin{aligned}\text{Sen } 90° &= \text{Sen } (45° + 45°)\\ &= 2\,(\text{Sen } 45°)\,(\text{Cos } 45°)\\ &= 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{2(\sqrt{2})(\sqrt{2})}{4}\\ &= \frac{4}{4}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cos } 90° &= \text{Cos}^2\ 45° - \text{Sen } 45°\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &= \frac{2}{4} - \frac{2}{4}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tan } 90° &= \text{Tan } 2(45°)\\ &= \frac{2 \text{ Tan } 45°}{1 - \text{Tan}^2\ 45°}\\ &= \frac{(2)\ (1)}{1 - 1}\\ &= \frac{2}{0}\\ &= \infty\end{aligned}$$

EJERCICIO 6.4

Calcular las funciones Seno, Coseno y Tangente de los siguientes ángulos de acuerdo a:

98. 60° = 2 (30°)

99. 120° = 2 (60°)