UNIDAD V.

TRIÁNGULOS OBLICUANGULOS

OBJETIVO PARTICULAR

En esta unidad el alumno conocerá los teoremas de senos y cósenos, resolverá problemas que involucren triángulos oblicuángulos, utilizando el método de descomposición en triángulos rectángulos.

1. *Introducción.*

Un triángulo oblicuángulo (u oblicuo) es aquel que tiene un ángulo mayor a 90^0 BCD. Si se coloca en un sistema de ejes coordenados a un triángulo oblicuángulo como se ve en la figura 1.

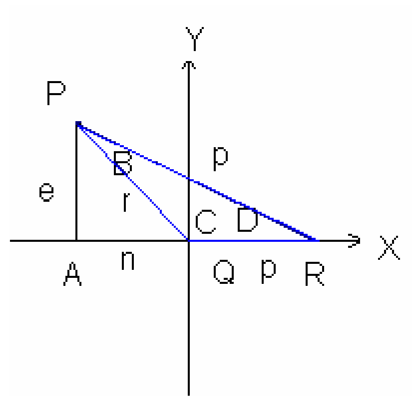
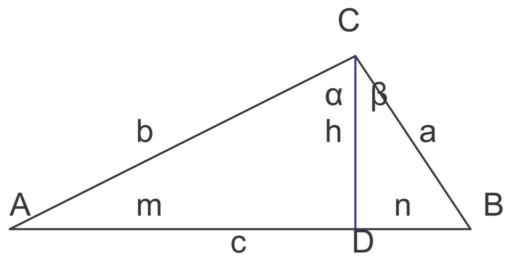


Figura 1

El ángulo "C" es mayor de 90^0., aun cuando este fuera agudo (menor de 90º), el estudio que se presenta a continuación, es valido para todo tipo de triángulo.

2. *Resolución por descomposición.*

Cualquier triángulo oblicuángulo se puede dividir en dos triángulos rectángulos (no necesariamente iguales) mediante alguna de sus alturas. A continuación se analizará el caso particular de un triángulo acutángulo:



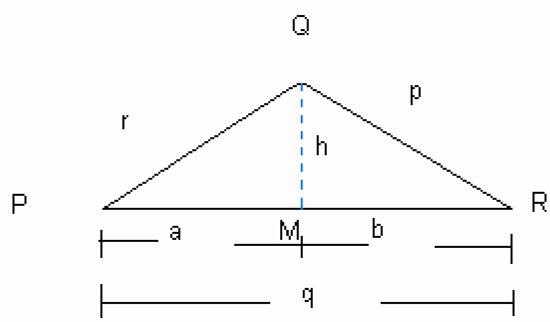
Tanto el triángulo ***ADC*** como el triángulo ***BDC*** son rectángulos que tienen las siguientes características:

1) el lado h es común a los dos.
2) El ángulo C es la suma de los ángulos α y β.
3) El lado c es la suma de los lados *m* y *n*.

De acuerdo a lo anterior, es posible resolver el triángulo ***ABC*** al solucionar por separado los triángulos rectángulos ***ADC*** y ***BDC***, por los métodos vistos en la unidad 3.

EJEMPLO 5.1:

En un triángulo oblicuángulo *PQR*, el lado **p** mide 38 cm. el lado **q** es de 56 cm y el ángulo **R** mide 62°33'. Calcular el valor de los demás elementos, incluyendo el área.



Primero en el triangulo "***PQR***" se traza la altura "***h***" y se ha separado en dos triángulos rectángulos que son "***QMP***" y "***QMR***"

A continuación se calcula la altura con el triangulo ***QMR***

$$\text{Sen } R = \frac{h}{p}$$
$$p \text{ Sen } R = h$$
$$(38)(\text{Sen } 62^\circ \ 33') = h$$
$$33.72 \text{ cm} = h$$

Se calcula en el triangulo ***QMP*** la base "***a***" con el auxilio del teorema de Pitágoras

$$a^2 + h^2 = p^2$$
$$a^2 = p^2 - h^2$$
$$a^2 = 17.52\text{cm}$$

y por construcción se sabe que:

$$a + b = q$$
$$a = q - a$$
$$a = 56 - 17.52$$
$$a = 38.48 \text{ cm}$$

con el auxilio de la función tangente se calcula el ángulo "***P***"

$$\text{Tan } P = \frac{h}{a}$$
$$\text{Tan } P = \frac{33.72}{38.48}$$
$$\text{Tan } P = 0.8762$$
$$\text{Ang Tan } 0.8762 = 41^\circ 13' 33''$$

con el teorema de suma de ángulos internos del triangulo

$$P + Q + R = 180$$
$$Q = 180^\circ - P - R$$
$$Q = 76^\circ \ 13' \ 27''$$

y en los triángulos rectángulos "***QMP***" y "***QMR***" el área es base por altura sobre dos

$$\Delta \text{ PMQ}$$
$$A = \frac{ah}{2}$$
$$A = \frac{(38.48)(33.72)}{2}$$
$$A = 648.77 \text{ cm}^2$$

Δ QMR

$$A = \frac{bh}{2}$$

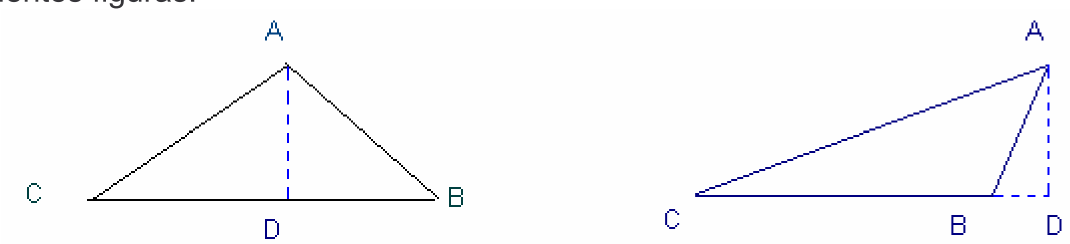
$$A = \frac{(17.52)(33.72)}{2}$$

$$A = 295.39 \text{ cm}^2$$

y el **área total** será: 648.77 + 295.39 = **944.16 cm^2**

3. *Teorema de Senos.*

Al trazar la altura (AD) al lado opuesto o su prolongación, a partir del vértice, es posible determinar o identificar dos triángulos rectángulos (ADC) como se ve en las siguientes figuras:



De acuerdo a lo ya estudiado en cualquiera de los dos casos, se determina que:

$$\text{Sen } B = \frac{AD}{AB} \quad \text{y} \quad \text{Sen } C = \frac{AD}{AC}$$

$$(AB)\,\text{Sen } B = AD \quad \text{y} \quad (AC)\,\text{Sen } C = AD$$

De las igualdades anteriores al despejar “*AD*” e igualar los primeros miembros se obtiene:

$$\frac{\text{Sen } B}{AC} = \frac{\text{Sen } C}{AB}$$

y en los mismos triángulos al trazar otra altura diferente a “ *AD* “ se deduce:

$$\frac{\text{Sen } A}{CB} = \frac{\text{Sen } C}{AB} = \frac{\text{Sen } B}{AC}$$

Y se concluye que los lados CB, AB y AC al identificarlos con la letra minúscula correspondiente al lado opuesto al ángulo son: “ a, c, y b “

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$$

Que se generaliza el teorema de senos como: “En todo triángulo los senos de los ángulos son proporcionales a sus lados opuestos.”

Si se observa con detenimiento el teorema de senos y se relaciona con la aritmética ella es una serie de fracciones equivalentes como:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ Que se puede escribir también como: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$

Por lo tanto, de acuerdo a los datos proporcionados y para facilidad de despeje el teorema de senos se puede escribir también como:

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

EJEMPLO 5.2:

Calcular la medida de los lados y ángulos faltantes de acuerdo a los datos siguientes: a = 12 cm. b = 17 cm. y B = 58°

Sustituyendo en el teorema de senos se tiene que:

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b}$$

$$\frac{\text{Sen } A}{12} = \frac{\text{Sen } 58°}{17}$$

$$\text{Sen } A = \frac{(\text{Sen } 58°)(12)}{17}$$

$$\text{Sen } A = \frac{(0.8480)(12)}{17}$$

$$\text{Sen } A = 0.5986$$

$$\text{Sen}^{-1}\ 0.5986 = 36°46'17''$$

Para el calculo del ángulo “ C “ utilizamos el teorema de la suma de ángulos internos de un triangulo igual a 180°

$$A + B + C = 180°$$

$$C = 180° - B - A$$

$$C = 180° - 58° - 36°46'17''$$

$$C = 85°13'43''$$

y para el calculo del lado “ c “, se utiliza nuevamente el teorema de senos

$$\frac{c}{\text{Sen } C} = \frac{b}{\text{Sen } B}$$

$$c = \frac{(\text{Sen } C)(b)}{\text{Sen } B}$$

$$c = \frac{(0.9965)(17)}{0.8480}$$

$$c = 19.98 \text{ cm}$$

EJERCICIO 5.1

67. Determina, en cada caso, la medida de los lados y de los ángulos faltantes de un triángulo de acuerdo a los siguientes datos:

a) p =5.5 cm.	q = 5.45 cm.	Q = 53° 43´
b) b = 28 m.	A = 0.3142 rad.	B = 0.6283 rad.
c) m = 24.75 cm.	o = 17.5 cm.	O = 18°
d) a = 75 m.	b = 36 m.	A = 60°
e) X = 35° 20’	Y = 58°	x = 45 cm.
f) N = 75°	m = 12 dm.	n = 23 dm.
g) a = 7.75 m.	b = 9.75 m.	B = 72°
h) r = 430 cm.	s = 500 cm.	R = 28 °

4. Teorema de Cósenos.

Con referencia a los triángulos rectángulos PAR y PAQ, de la Figura 1 aplicando el teorema de Pitágoras queda:

a) $q^2 = (n + p)^2 + e^2$

b) $e^2 = r^2 - n^2$ reemplazando en a)

c) $q^2 = (n + p)^2 + r^2 - n^2$ desarrollando el binomio

d) $q^2 = n^2 + 2np + p^2 + r^2 - n^2$

e) $q^2 = p^2 + r^2 + 2np$

Con lo que se concluye que en todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Al sustituir en cada caso la proyección de "r" sobre "p" por el respectivo coseno del ángulo se obtiene lo siguiente:

$$n = r \cos Q$$

Que sustituido en e)

f) $q^2 = p^2 + r^2 + 2rpCosQ$

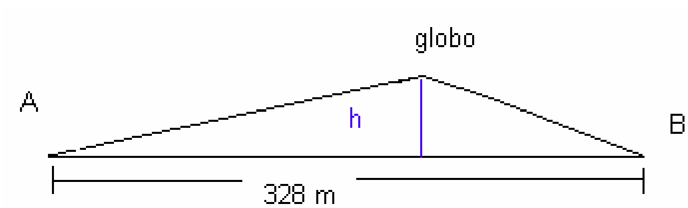
Con lo que se concluye el teorema de Cósenos en forma general: En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos su doble multiplicado por el coseno del ángulo formado por ellos.

5. Aplicaciones prácticas.

Al igual que en los triángulos rectángulos, existe una gran variedad de aplicaciones en las que intervienen triángulos oblicuángulos.

EJEMPLO 5.3

Dos observadores distantes de 328 m en terreno horizontal, miden los ángulos de elevación de un globo estático, situado en el mismo plano que ellos, y hallan que sus medidas son: A = 39° y B = 47°30'. ¿A qué altura se halla el globo?



Primero con el teorema de suma de ángulos se calcula el del globo "G"

$$G + A + B = 180°$$
$$G = 180° - A - B$$
$$G = 93° \; 30'$$

A continuación con el teorema de senos se calcula el lado "***b***"

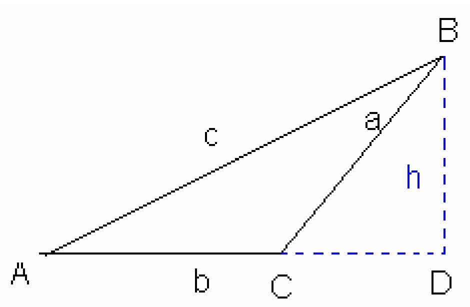
$$\frac{b}{Sen\ B} = \frac{g}{Sen\ G}$$
$$b = \frac{g\ Sen\ B}{Sen\ G}$$
$$b = \frac{(328)(0.6923)}{0.9981}$$
$$b = 206.8\ m$$

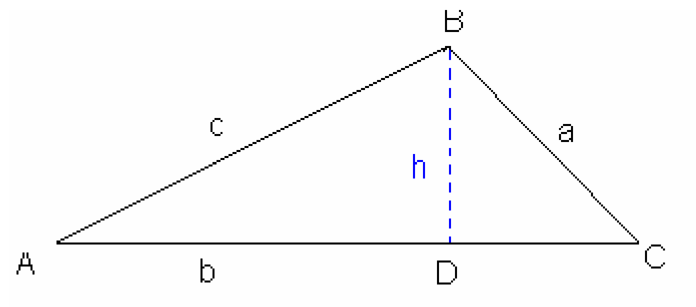
Finalmente con cualquiera de los triángulos rectángulos se calcula la altura "***h***":

$$\text{Sen A} = \frac{h}{b}$$
$$b \ \text{Sen A} = h$$
$$(206.8)(0.7373) = h$$
$$152.47 \ m = h$$

EJEMPLO 5.4

- Calculo del área de un triangulo conocido dos lados y el ángulo formado entre ellos





Se suponen en la figura anterior conocidos los lados y el ángulo "C", siendo "h" la altura del triangulo desde el vértice "B", por lo que:

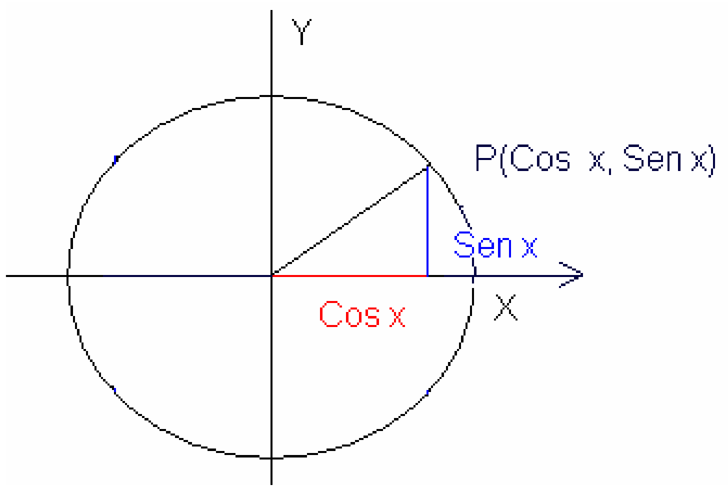
$$\text{Sen A} = \frac{h}{c}$$
$$c \ (\text{Sen A}) = h$$

Al sustituir el valor de la altura en la formula del área:

$$\text{Area} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$
$$\text{Area} = \frac{(\text{base}) \ (c \ \text{Sen A})}{2}$$

- Calculo del área de un triangulo conocidos los tres lados.

Este camino o procedimiento es útil ya que lo mas sencillo de medir en polígono son sus lados.



De la figura anterior, donde el radio es unitario, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$1^2 = \text{Sen}^2\,x + \text{Cos}^2\,x$$
$$1 - \text{Cos}^2\,x = \text{Sen}^2\,x$$

(esta es una *identidad* llamada pitagórica que se utilizara en la sig. Unidad)

De acuerdo al teorema de cósenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}\,A$$
$$2bc\,\text{Cos}\,A = b^2 + c^2 - a^2$$

Así mismo:

$$\text{Area} = \frac{bc\,\text{Sen}\,A}{2}$$

eleva ndo al cuadrado ambos miembros

$$A^2 = \frac{1}{4}b^2\,c^2\,\text{Sen}^2\,A$$

sutituyendo a continuacion $\text{Sen}^2\,A$

$$A^2 = \frac{1}{4}b^2\,c^2\,(1-\text{Cos}^2\,A)$$
$$A^2 = \frac{1}{4}b^2\,c^2\,(1-\text{Cos}\,A)\,(1+\text{Cos}\,A)$$
$$A^2 = \frac{1}{16}(2bc)\,(1-\text{Cos}\,A)\,(2bc)\,(1+\text{Cos}\,A)$$
$$A^2 = \frac{1}{16}(2bc - 2bc\,\text{Cos}\,A)\,(2bc + 2bc\,\text{Cos}\,A)$$

reemplazando a 2bc Cos A

$$A^2 = \frac{1}{16}(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)$$

$$A^2 = \frac{1}{16}\left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[(b+c)^2 - a^2\right]$$

al interior de los corchetes hay diferencia de cuadrados

$$A^2 = \frac{1}{16}\left[(a-b+c)(a+b-c)\right]\left[(b+c+a)(b+c-a)\right]$$

$$A^2 = \left[\frac{a+b+c}{2} - b\right]\left[\frac{a+b+c}{2} - c\right]\left[\frac{a+b+c}{2}\right]\left[\frac{a+b+c}{2} - a\right]$$

si se llama :

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

esto es la mitad del perimetro del triangulo

$$A^2 = s(s-b)(s-c)(s-a)$$

depejando A

$$A = \sqrt{s(s-b)(s-c)(s-a)}$$

A esta ultima expresión del área se le conoce con el nombre de *formula de Heron*

EJEMPLO 5.5

Calcular el área del triangulo cuyos lados miden 16 cm., 14cm. y 9 cm.

$$s = \frac{16+14+9}{2}$$
$$= 19.5$$

$$A = \sqrt{19.5\,(19.5-16)(19.5-14)(19.5-9)}$$
$$= \sqrt{19.5\,(3.5)(5.5)(10.5)}$$
$$= \sqrt{3941.4375}$$
$$= 62.78\ cm^2$$

EJERCICIO 5.2

68. En un paralelogramo los lados adyacentes miden respectivamente 34 cm. y 65 cm. y uno de sus ángulos mide 48^0. Calcular el área del paralelogramo.

69. Calcular el área de un octágono regular inscrito en un círculo cuyo radio mide 34 cm.

70. En un circulo de 12.56 cm. de diámetro se inscribe un pentágono, calcular su área.

71. Un paralelogramo tiene lados cuyas longitudes son 32 y 75 cm. y uno de sus ángulos mide 73°. Calcular la longitud de sus diagonales.

72. Calcular el área de cada triangulo.

a)	7 m	8m	9m
b)	5.9 cm.	9.78 cm.	6.1 cm.
c)	145 dm.	161 dm.	79 dm.

73. Calcule todos los elementos faltantes en los siguientes triángulos incluyendo el área.

a)	A = 138º	b = 13 cm.	c = 22 cm.
b)	P = 97º	q = 234 m.	r = 278 m.
c)	M = 121º	e = 38 m.	h = 53 m.