

UNIDAD IV.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD

OBJETIVO PARTICULAR

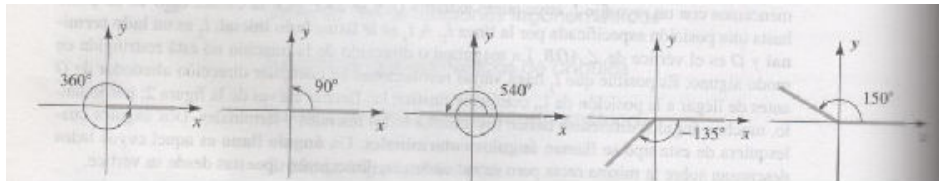
Al término de la unidad el alumno a través del eje cartesiano, deducirá el concepto de ángulo positivo y negativo, calculará los valores de las razones trigonométricas de cualquier ángulo. Trazará el círculo trigonométrico y a partir de él comprenderá la naturaleza de los valores de las razones trigonométricas. Expresará la medida de ángulos de cualquier magnitud como un ángulo agudo y esbozará las gráficas de las funciones Seno, Coseno y Tangente.

1. Conceptos básicos de un ángulo ubicado en un sistema de ejes coordenados.

A partir del concepto trigonométrico de ángulo visto en la unidad I, si el extremo sobre el cual gira la semirrecta se ubica en el origen de un plano cartesiano, y se hace rotar libremente sobre él en cualquier sentido, se pueden generar ángulos entre 0° y 360° , recibiendo los siguientes nombres:

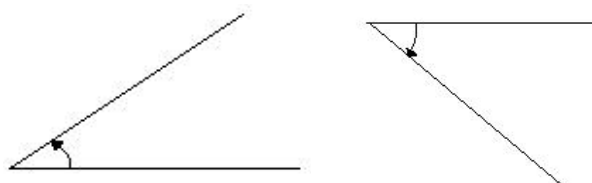
1.1 Ángulo en posición estándar.

Se le denomina así a un ángulo que tiene su lado inicial en el eje de las equis positivo y gira en cualquier sentido, como se muestra en las siguientes figuras:



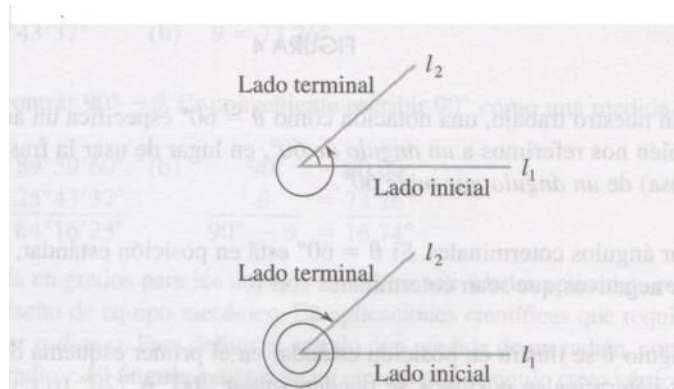
1.2 Ángulos positivos y negativos.

Cuando un ángulo en posición estándar se genera el sentido inverso al funcionamiento de las manecillas de un reloj se dice que es positivo o levógiro, y en el mismo sentido del funcionamiento de las manecillas del reloj es negativo o dextrógiro, como se muestra a continuación:



1.3 Ángulos coterminales.

Son los ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal, no importa que este último realice varios giros alrededor del origen o vértice ni del sentido de la rotación.



EJEMPLO 4.1

Encontrar dos ángulos positivos y dos negativos coterminales de un ángulo en posición estándar cuando $A = 30^\circ$

Para encontrar los ángulos positivos se suman 360° o 720° o cualquier múltiplo de 360° .

Solución:

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \qquad 30^\circ + 720^\circ = 750^\circ$$

Y para los negativos se le suman -360° o -720° o cualquier múltiplo de 360° .

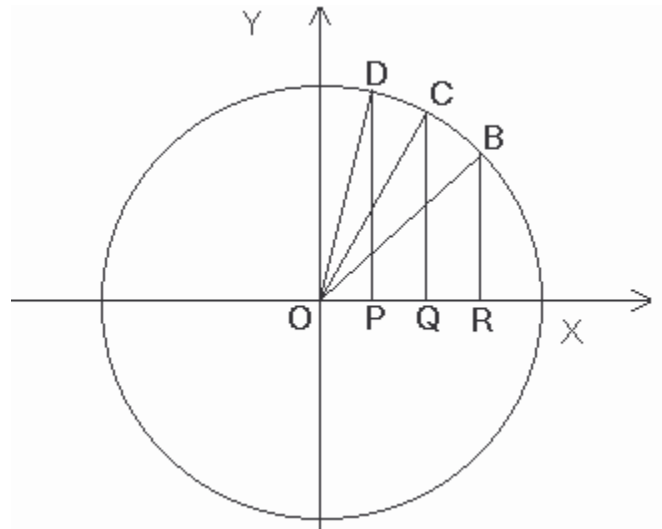
$$30^\circ + (-360^\circ) = -330^\circ \qquad 30^\circ + (-720^\circ) = -690^\circ$$

2. Variación de las funciones de 0° a 360° .

a) Ángulos comprendidos entre 0° y 90° .

Para este tema es necesario revisar y recordar lo visto al respecto en la unidad 3.

Sea **OX** la posición inicial del lado móvil de los ángulos **BOR**, **COQ** y **DOP** además siendo el radio unitario, desde los puntos **B**, **C** y **D** se trazan las perpendiculares al eje **OX** y forman varios triángulos rectángulos en los que el cateto opuesto al ángulo central va aumentando mientras crece el ángulo central y lo contrario con el adyacente, esto es:



$$BR < CQ < DP \quad \text{y} \quad OR > OQ > OP$$

De acuerdo a las definiciones de las funciones se tiene que:

- $\frac{BR}{OB} < \frac{CQ}{OC} < \frac{DP}{OD}$, esto es $\text{Sen BOR} < \text{Sen COQ} < \text{Sen DOP}$
- $\frac{BR}{OR} < \frac{CQ}{OQ} < \frac{DP}{OP}$, esto es $\text{Tan BOR} < \text{Tan COQ} < \text{Tan DOP}$
- $\frac{OB}{OR} < \frac{OC}{OQ} < \frac{OD}{OP}$, esto es $\text{Sec BOR} < \text{Sec COQ} < \text{Sec DOP}$

Como conclusión, se observa que: cuando un ángulo varía de 0° a 90° las funciones Seno, Tangente y Secante **umentan su valor** e inversamente las funciones Coseno, Cotangente y Cosecante **disminuyen su valor** cuando el ángulo aumenta.

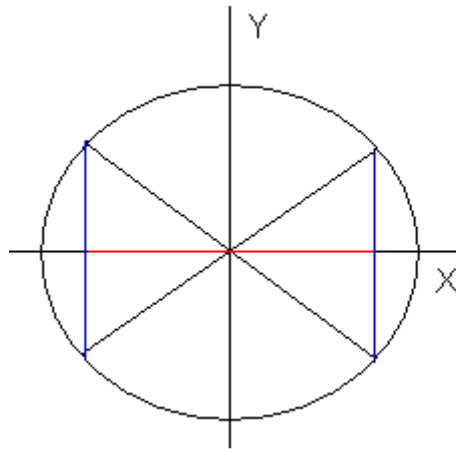
Se observa en el esquema que al ser el ángulo mayor de 90° y menor de 180° se obtiene una situación similar a la anterior, sólo que en el segundo cuadrante y ahora, al aumentar el valor del ángulo de 90° a 180° las funciones Seno, Tangente y Secante **disminuyen su valor** e inversamente las funciones Coseno, Cotangente y Cosecante **umentan su valor**.

Si desea tener una visualización de este hecho puede ingresar a la página cuya dirección se proporciona a continuación:

http://www.pntic.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/angcual3.htm

Existen otras direcciones en la red de Internet donde se pueden consultar estos temas.

3. Valores de las funciones de los ángulos cuadrangulares.



Siendo el radio unitario se concluye que las líneas azules representan la función **Seno** y las rojas al **Coseno**, con el auxilio de esta gráfica se esta en condiciones de encontrar la variación de estas funciones así como su signo. Se debe tomar en cuenta que en el eje horizontal, del origen a la derecha se considera positivo y a la izquierda negativo, en tanto que en el vertical, hacia arriba es positivo y hacia abajo negativo.

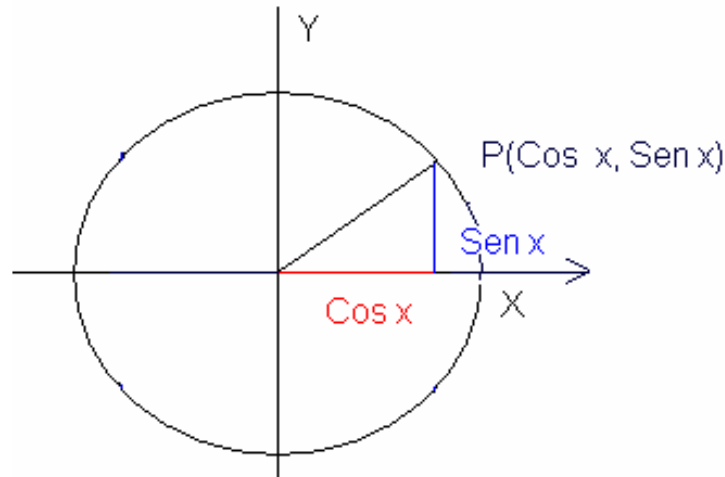
EJERCICIO 4.1

66. Completar la tabla siguiente:

FUNCIÓN / CUADRANTE	SIGNO			
	I	II	III	IV
SENO	+			
COSENO				+
TANGENTE			+	
COTANGENTE				
SECANTE	+			
COSECANTE				-

4. Círculo Trigonométrico.

Como ya se mencionó anteriormente, el círculo trigonométrico es el que tiene su centro en el origen de un plano cartesiano y su radio es igual a la unidad ($r = 1$).

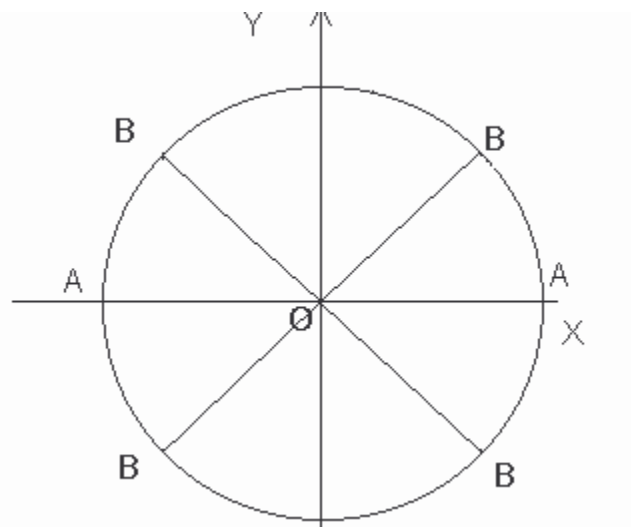


En estas condiciones, cualquier ángulo generado por el radio dará lugar a un triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa es igual a uno y los catetos, por las propias definiciones de Seno y coseno, a los valores de dichas funciones:

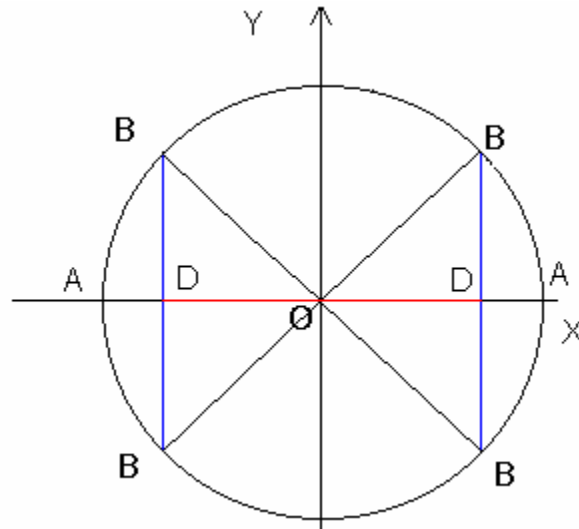
$$\begin{array}{ll} \text{Sen}x = \frac{CO}{H} & \text{Cos}x = \frac{CA}{H} \\ \text{Sen}x = \frac{CO}{1} & \text{Cos}x = \frac{CA}{1} \\ \text{Sen}x = CO & \text{Cos}x = CA \end{array}$$

5. Reducción de ángulos al primer cuadrante.

Debido a lo expuesto en el apartado 1 de esta unidad, los ángulos mayores de 90° y menores de 360° (localizados en los cuadrantes II, III y IV), se pueden expresar como ángulos equivalentes en el primer cuadrante (menores de 90°), para lo cual partiremos del siguiente análisis:



El lado terminal del ángulo BOA esta en los cuatro cuadrantes. Al trazar de "B" a "D" una línea perpendicular al eje de las "X" se determinan las ordenadas (líneas azules) y las abscisas (líneas rojas). Estas mismas medidas en valor absoluto se pueden obtener en el primer cuadrante, como en la figura siguiente:



Observe:

$$\begin{aligned} \text{Sen BOD} &= \frac{BD}{BO} && \text{en primer cuad. BD es positivo por lo tanto } \text{Sen BOD} = \text{Sen BOD} \\ \text{Sen BOD} &= \frac{BD}{BO} && \text{en 2º cuad. BD es positivo por lo tanto } \text{Sen BOD} = \text{Sen BOD} \\ \text{Sen BOD} &= \frac{BD}{BO} && \text{en 3º cuad. BD es negativo por lo tanto } \text{Sen BOD} = - \text{Sen BOD} \\ \text{Sen BOD} &= \frac{BD}{BO} && \text{en 4º cuad. BD es negativo por lo tanto } \text{Sen BOD} = - \text{Sen BOD} \end{aligned}$$

Se recomienda restar el lado Terminal en el segundo y cuarto cuadrante y en el tercero del ángulo dado restar 180° .

EJEMPLO 4.2

$$\begin{aligned} \text{Sen } 167^\circ &= 2^\circ \text{ cuad } \text{Sen } (180^\circ - 167^\circ) = \text{Sen } 13^\circ = 0.2250 \\ \text{Sen } 218^\circ &= 3^\text{er} \text{ cuad. } \text{Sen } (218^\circ - 180^\circ) = - \text{Sen } 38^\circ = -0.6157 \\ \text{Sen } 280^\circ &= 4^\circ \text{ cuad. } \text{Sen } (360^\circ - 280^\circ) = - \text{Sen } 80^\circ = -0.9848 \\ \text{Cos } 101^\circ &= 2^\circ \text{ cuad } \text{Cos}(180^\circ - 101^\circ) = - \text{Cos } 79^\circ = -0.1908 \\ \text{Cos } 245^\circ &= 3^\text{er} \text{ cuad. } \text{Cos}(245^\circ - 180^\circ) = - \text{Cos } 65^\circ = -0.4226 \\ \text{Cos } 310^\circ &= 4^\circ \text{ cuad. } \text{Cos } (360^\circ - 310^\circ) = \text{Cos } 50^\circ = 0.6428 \\ \text{Tan } 157^\circ &= 2^\circ \text{ cuad. } \text{Tan } (180^\circ - 157^\circ) = - \text{Tan } 23^\circ = -0.4245 \\ \text{Tan } 205^\circ &= 3^\text{er} \text{ cuad. } \text{Tan}(205^\circ - 180^\circ) = \text{Tan } 25^\circ = 0.4663 \\ \text{Tan } 350^\circ &= 4^\circ \text{ cuad } \text{Tan}(360^\circ - 350^\circ) = - \text{Tan } 10^\circ = -0.1763 \end{aligned}$$

6. Gráficas de funciones. Seno, Tangente y Secante.

Con ayuda de tu calculadora científica, papel milimétrico y un lápiz se pueden obtener las gráficas de las funciones Trigonométricas a partir de completar la siguiente tabla:

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	
Sen x	0											

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	
Cos x	1											

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	
Tan x	0											

Una visualización más completa y detallada la puedes encontrar en la dirección de Internet que se da a continuación. Cualquier duda o aclaración con su profesor, en el cubículo de la jefatura del departamento o con los profesores encargados de las asesorías.

http://www.pntic.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/sencosec2.htm