UNIDAD II

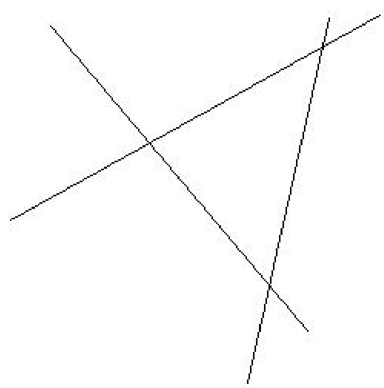
OBJETIVO PARTICULAR:

Al finalizar la unidad el alumno definirá y clasificará a los triángulos, conocerá sus teoremas generales e identificará y definirá las rectas y puntos notables de los mismos.

La Trigonometría es una rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de los triángulos y sus ángulos, así como las propiedades de ellos.

TRIÁNGULOS.

1. *Definición:* Triángulo es la porción del plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos.



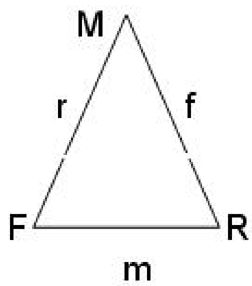
Características.

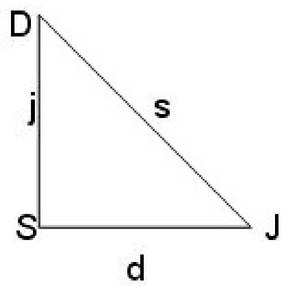
Los elementos que constituyen a un triángulo son:

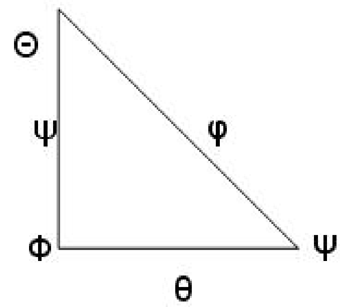
a) **Vértices**, son los puntos de intersección de las rectas.
b) **Lados**, son los segmentos de recta determinados por los vértices.
c) **Ángulos** interiores, son formados por los lados

Un lado de un triángulo es ***adyacente*** a un ángulo cuando forma parte del mismo y de lo contrario es ***opuesto***

La identificación de estos elementos se realiza con letras de los distintos alfabetos Los vértices y ángulos con mayúsculas y los lados con minúsculas correspondiente al vértice opuesto, como se muestra en los siguientes triángulos:







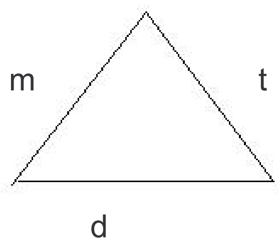
2. *Clasificación.*

Los triángulos se clasifican atendiendo a la medida de sus lados y a la magnitud de sus ángulos.

A) En relación con sus lados

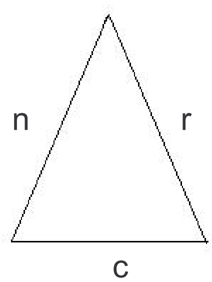
a) EQUILÁTERO: el que tiene sus tres lados iguales.

m = t = d.



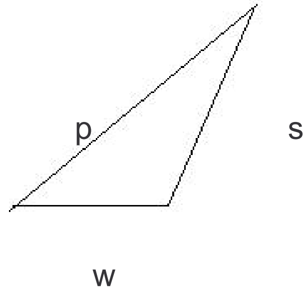
b) ISÓSCELES: el que tiene dos lados iguales y uno desigual.

$n = r \neq c$



c) ESCALENO: cuando sus tres lados son diferentes.

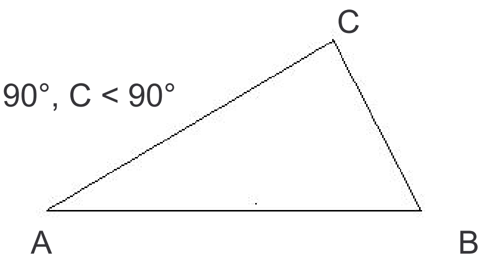
$p \neq s \neq w$



B) Con relación a la magnitud de sus ángulos:

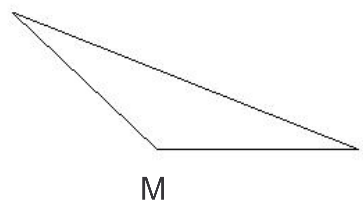
a) ACUTÁNGULO: si sus tres ángulos son agudos (menores de 90°).

A < 90°, B < 90°, C < 90°



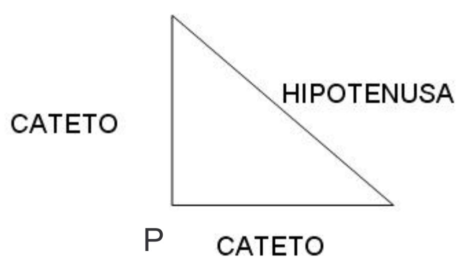
b) OBTUSÁNGULO: aquel que tienen un ángulo obtuso (mayor de 90°).

M > 90°



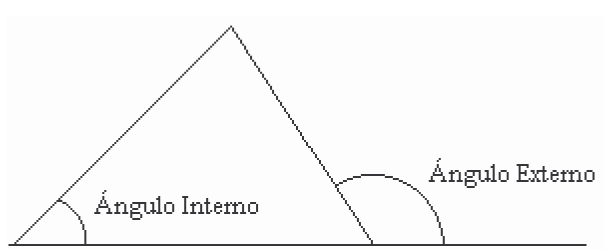
c) RECTÁNGULO: cuando tiene un ángulo recto (de 90°). En este triángulo los lados reciben nombres especiales, como se observa en la figura:

P = 90°



Los catetos que forman el ángulo recto son segmentos perpendiculares.

En todo triángulo se forman ángulos interiores y exteriores. Los interiores se forman con dos lados consecutivos y los exteriores con un lado y la prolongación de otro.



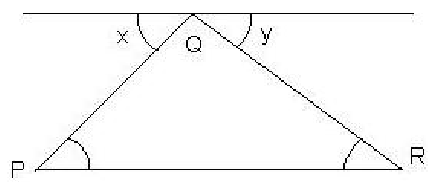
3. *Teoremas Generales.*

Existen teoremas relacionados con los elementos de los triángulos, algunos de ellos se analizarán a continuación:

a) La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.

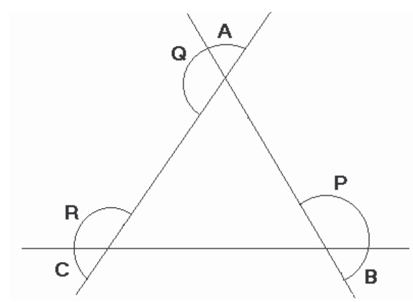
Demostración:

$$\angle x = \angle P$$
$$\angle y = \angle R$$
$$\angle x + \angle Q + \angle y = 180^0$$
$$\angle x = \angle P; \angle y = \angle R$$
por lo tanto
$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$$



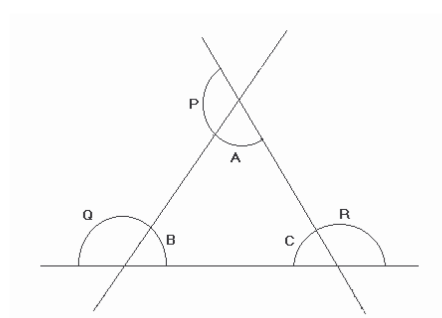
b) La suma de los ángulos externos de cualquier triángulo es igual a 360°.

$$\angle A + \angle Q = 180°$$
$$\angle C + \angle R = 180°$$
$$\angle P + \angle B = 180^0$$
$$Pero\ \angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\therefore$$
$$\angle P + \angle R + \angle Q = 360^0$$



c) En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

$$\angle A + \angle P = 180°$$
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$Así:$$
$$\angle P = \angle B + \angle C$$



d) En todo triángulo, a mayor magnitud de un ángulo, mayor será el valor del lado opuesto.
e) En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

EJERCICIO 2.1

26. En un triángulo rectángulo que además es isósceles ¿cuánto medirá cada ángulo agudo?

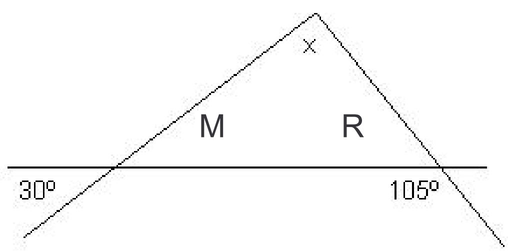
27. De las siguientes medidas ¿con cuales se podrá trazar un triángulo isósceles

a) 5cm, 5cm y 6cm b) 8cm, 6.5cm. y 13.5cm. c) 5cm, 4.5cm y 9cm

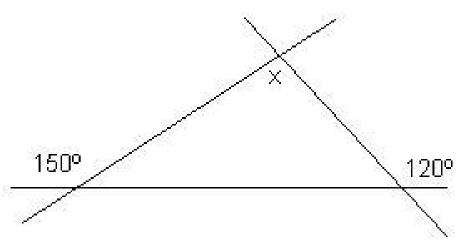
28. ¿En cual de los triángulos las cuatro líneas y puntos notables coinciden? ¿Por qué?

29. Si un triángulo isósceles su perímetro mide 23m, y uno de sus lados es de 7.4m, ¿cuánto mide el lado desigual?

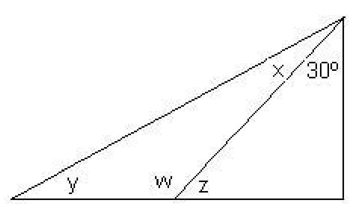
30. Con los datos que se dan calcular y justificar el valor del ángulo que se pide:

a)


$\angle x =$

b)


$\angle x =$

c)


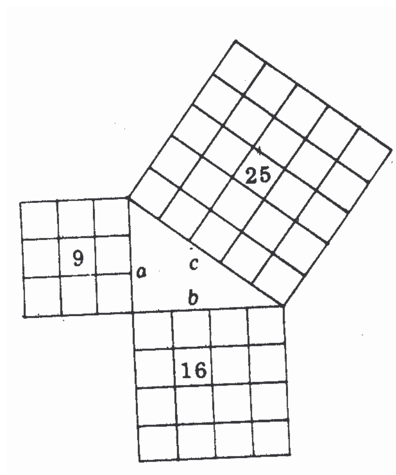
$\angle (x+y) =$

En los triángulos rectángulos, además de las propiedades inherentes anteriores, se cumple el siguiente teorema:

- *Teorema de Pitágoras*. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hoy día hay más de 300 demostraciones conocidas de este teorema. Pitágoras fue un alumno de TALES DE MILETO, quien es considerado como el creador de la demostración primera de éste.

Sea el triángulo rectángulo ACB, con las longitudes de lado siguientes c = 5cm, a = 3cm y b = 4cm, gráficamente se representaría como:



Para este triángulo en particular se puede escribir el Teorema de Pitágoras en lenguaje algebraico como:

$$c^2 = b^2 + a^2$$

- Desde los primeros contactos que se tienen con la geometría nos muestran y demuestran que para el calculo del perímetro y el área del triangulo se utilizan los elementos llamados lados (l), base (b) y altura (h) que se relacionan en la forma siguiente:

$$P = 3l$$

$$A = \frac{bh}{2}$$

Los elementos mas fáciles de medir son los lados (***a***, ***b***, y ***c***) y existe una forma de relacionarlos con el semiperímetro (**s**), para calcular el área del triangulo, a ello se le conoce como "*formula de Heron*". Misma que se vera su desarrollo en la unidad V, por lo pronto se aceptara sin demostración.

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

EJEMPLO 2.1

Calcular el área del triangulo cuyos lados miden:

a = 16 cm. b = 36 cm. y c = 34 cm.

$$s = \frac{16 + 36 + 34}{2}$$
$$= 43 \text{ cm.}$$

$$A = \sqrt{43(43 - 16)(43 - 36)(43 - 34)}$$
$$= \sqrt{73143}$$
$$= 270.45 \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 2.2

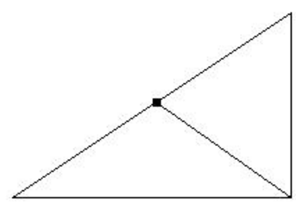
En cada uno de los siguientes casos calcular el valor del área de los triángulos

31. a = 38 cm. b = 46 cm. c = 54 cm.
32. a = 68.36 m. b = 124.4 m c = 166.43 m.
33. a = 8.6 dm. b = 95.2 dm. c = 7.44 dm.
34. a = 48 mm. b = 86 mm. c = 57 mm.
35. a = 0.346 m. b = 64 cm. c = 578 mm.

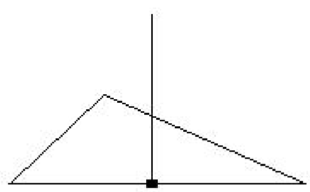
4. *<u>Rectas notables del triángulo.</u>*

Algunos elementos de un triángulo, que por sus características especiales requieren tener un nombre en particular son los siguientes:

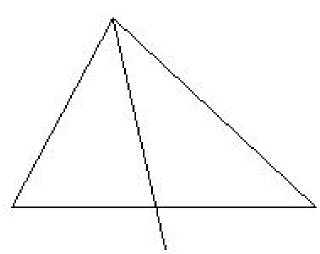
a) <u>Mediana</u>: segmento trazado desde un vértice al punto medio del lado opuesto. El punto donde se cruzan las tres medianas se conoce con el nombre de *baricentro* o *centro de gravedad*.



b) <u>Mediatriz</u>: perpendicular trazada por el punto medio de cada lado. El punto de intersección de las tres mediatrices se llama *circuncentro*, es decir, el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.



c) <u>Bisectriz</u>: recta que partiendo de un vértice divide al ángulo en dos ángulos iguales. El punto de intersección de las bisectrices se denomina *incentro*, que es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.



d) <u>Altura</u>: perpendicular desde un vértice al lado opuesto o su prolongación. El punto donde se interceptan las tres alturas se denomina *ortocentro*.