CENTRO: BACHILLERATO
DEPARTAMENTO: MATEMATICAS
SEMESTRE: 2°
CREDITOS: 6 HT1 HP4
PLAN DE ESTUDIO 2004

APUNTES DE MATEMATICAS II (TRIGONOMETRIA)

BACHILERATO DE LA U. A. A.

OBJETIVO GENERAL: El alumno, al finalizar el curso y con base en sus conocimientos de geometría euclidiana, así como de razones y proporciones aritméticas, adquirirá conocimientos trigonométricos que le darán habilidad en la interpretación y solución de problemas que involucren triángulos. Comprobará identidades trigonométricas, resolverá ecuaciones trigonométricas y analizará su solución.

UNIDAD I

GEOMETRÍA EUCLIDIANA.

Objetivo Particular: Al término de la unidad el alumno será capaz de definir los conceptos básicos de la geometría euclidiana e identificar sus representaciones gráficas, así como expresar en los diferentes sistemas de medición el valor de un ángulo.

1. *Introducción.*

Las raíces griegas de la palabra *Geometría* son "***geos***" que significa *tierra* y "***metron***" *medir* o *medida*, esto es, la geometría se refiere a la medición de la tierra.

En un principio esta palabra se utilizaba para designar la acción de medir las extensiones de los terrenos de cultivo. Con el paso del tiempo y ya desde la época de los griegos, la geometría es una rama de la matemática que se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas.

Desde entonces ha sido considerada una de las ramas de la matemática más importante, tanto que en la entrada de la academia de *Platón* había un letrero grabado que decía "*nadie entre que no sepa geometría*".

Algunos ejemplos de figuras geométricas son el triángulo, el cuadrado, el pentágono y la circunferencia.

Si se subdivide una figura geométrica o si se unen varias se obtiene a su vez nuevas figuras geométricas.

La geometría se ha caracterizado por el rigor en sus demostraciones para la deducción y comprensión de conocimientos. En estas demostraciones se utilizan conceptos como definición, axioma, postulado, teorema, corolario, y ley. Investiga el significado de cada uno de ellos y coméntalos en clase.

2. *<u>Características de los cuerpos físicos y geométricos.</u>*

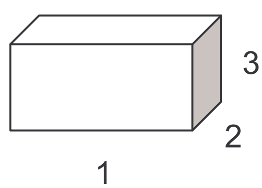
CUERPO FISICO:

Toda la materia que ocupa un lugar en el espacio, como un cuaderno, una mesa, una silla, etc., es un cuerpo físico. La porción de espacio que ocupa se denomina volumen.

CUERPO GEOMÉTRICO:

Toda porción limitada del espacio, esté o no ocupada por materia, son *cuerpos* geométricos y en ellos sólo se atiende a su forma y se hace abstracción de la materia. Así por ejemplo un orificio es un cuerpo geométrico, aunque esté vacío, ya que hay materia que lo rodea.

Las características de los cuerpos geométricos son tres, y se conocen como dimensiones: 1) largo *o longitud*, 2) *ancho o anchura* y 3) *alto o altura*, también llamada, *grosor*, *espesor* o *profundidad*. Véase la siguiente figura:



3. *<u>Postulados básicos de la recta.</u>*

PUNTO Y RECTA

Los elementos fundamentales en geometría son el punto y la recta.

El punto es una idea o abstracción, no es definible con términos sencillos, sin embargo, las "definiciones" más comunes encontradas en algunos textos son las siguientes:

1. "Señal de dimensiones pequeñas ordinariamente circular, que, por contraste de color o de relieve, es perceptible en una superficie"[1]
2. "Configuración geométrica fundamental sin extensión (dimensión cero) engendrada por ejemplo, por la intersección de dos rectas"[2]
3. "Es el límite de las líneas y marca sus extremos o el cruce de varias de ellas"[3]
4. "Lo que tiene posición, pero no dimensión"[4]
5. "La marca más pequeña que se puede dibujar"[5]

La línea recta es una sucesión de puntos que siguen la misma dirección. Si los puntos de una línea no siguen la misma dirección se denomina *línea curva*.

POSTULADOS DE LA RECTA.

I. La recta es la distancia más corta entre dos puntos.
II. Por dos puntos sólo puede pasar una recta; es decir, que dos puntos determinan una recta.
III. Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas y en una recta hay una infinidad de puntos.
IV. Dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extensión (están superpuestas).
V. Dos rectas distintas no pueden tener más de un punto en común.
VI. Dos rectas distintas pueden no tener ningún punto en común (paralelas).
VII. Un segmento definido entre dos puntos tiene uno y sólo un punto medio.
VIII. Por un punto sobre una línea recta puede pasar una y sólo una perpendicular.
IX. La distancia de un punto a una recta es la perpendicular trazada del punto a la recta.

4. *Polígonos regulares e irregulares.*

Un polígono es toda porción de un plano limitada por tres o más líneas rectas, que se intersecan o cortan dos a dos. El polígono, por tanto, siempre es una figura cerrada.

---

[1] (2001). "Diccionario de la Lengua Española", Vigésima segunda edición. http://buscon.rae.es/draeI/SrvltGUIBusUsual.
[2] Ströble, W. (1980). "Diccionarios Rioduero", Matemática, 1ª edición. Ediciones Rioduero, México. Pág. 171.
[3] Landaverde; F. de J. (1997). "Curso de Geometría", 6ª edición. Edit. Progreso S. A., México. Pág. 3.
[4] Hemmerling; E. M. (2002). "Geometría Elemental",22ª edición. Edit. Limusa, México. Pág. 21.
[5] Clemens, S R. et al, (1998). "Geometría", 1ª edición. Edit. Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V. pág. 10.

Un polígono regular es aquél cuyos lados y ángulos son iguales, es decir son equiláteros y *equiángulos*. De lo contrario es irregular.

Los polígonos se clasifican de acuerdo al número de lados. Algunos ejemplos son:

Número de lados	Nombre
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Nueve	Eneágono
Diez	Decágono
Once	Endecágono
Doce	Dodecágono
Quince	Pentadecágono

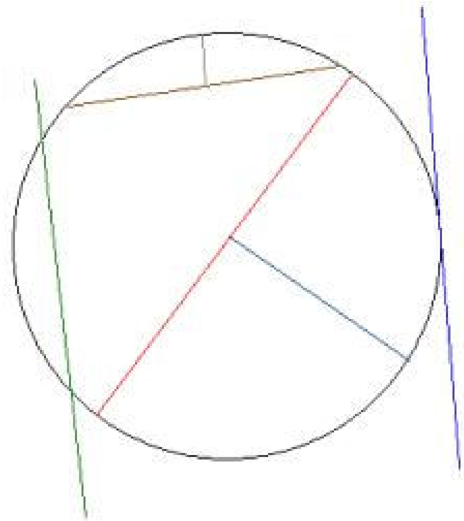
En general los polígonos se les pueden denominar polígonos de "*n*" lados. Por ejemplo, al octágono también se le puede llamar polígono de ocho lados, etc.

Repasa las fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas de las figuras geométricas más comunes utilizadas en este curso; (ver anexo 1).

5. *Circunferencia.*

La circunferencia se define como la sucesión de puntos ubicados en el mismo plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. La circunferencia se puede considerar como un polígono de lados infinitos; es una figura limitada por una línea curva cerrada. El círculo es la porción de plano dentro de la circunferencia, equivale a la superficie. La medida de la superficie se conoce como *área*. A la medida de la circunferencia se le denomina *perímetro*.

Identifique los elementos notables de la circunferencia y los relacionados con ella:



1. Centro.
2. Radio.
3. Cuerda.
4. Diámetro.
5. Arco.
6. Secante.
7. Tangente.
8. Flecha.
9. Segmento Circular.
10. Sector Circular.

Cálculo de áreas y perímetros.

En el anexo 1 se puede ver que el perímetro se calcula empleando la fórmula $\boldsymbol{P = 2\pi r}$ y el área con $\boldsymbol{A = \pi r^2}$. Utilízalas para resolver el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 1.1

En cada uno de los siguientes problemas considera el valor de π = **3.1416**.

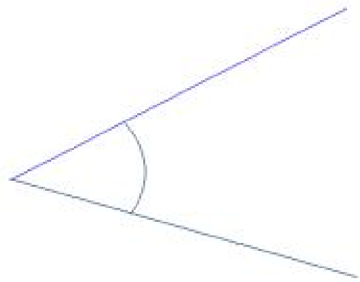
1. Calcular el perímetro y área de la circunferencia cuyo radio mide 15cm.
2. El perímetro de una circunferencia es 314.16 cm. Calcular el radio y el área.
3. El área de un circulo es 1963.5 cm^2. calcular la medida del radio y el perímetro
4. El radio de la llanta de una bicicleta es de 60 cm. ¿Que distancia avanzará la bicicleta si la llanta efectúa 10 vueltas?
5. ¿Cuánto mide el diámetro de un monociclo si al dar una vuelta completa recorre una distancia 471 cm?

6. *Ángulos.*

6.1. *Definición y características.*

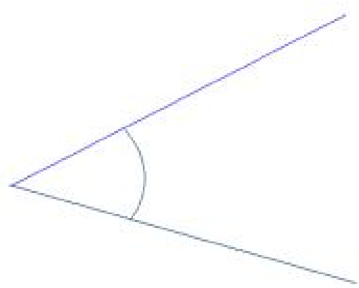
- Concepto Euclidiano.

Euclides definió al ángulo como: "la abertura comprendida entre dos semirrectas *c*on un *mismo origen* llamado *vértice*". A las semirrectas se les da el nombre de lados.



- Concepto Geométrico.

Abertura que forman en un plano **dos** semirrectas unidas en un punto llamado vértice, considerando que una de ellas gira con el vértice como pivote.

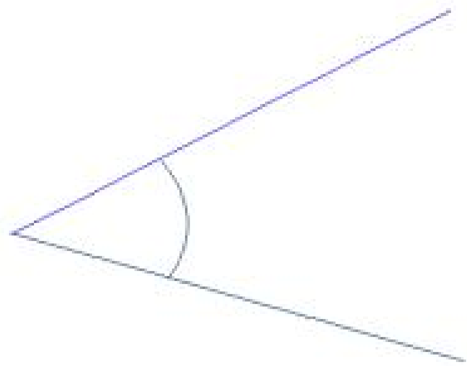


- Concepto Trigonométrico.

En trigonometría se define al ángulo como *la abertura que origina una semirrecta al girar en un* plano *sobre uno de sus extremos*.

Al extremo sobre el cual gira la semirrecta se le denomina **origen** o **vértice**.

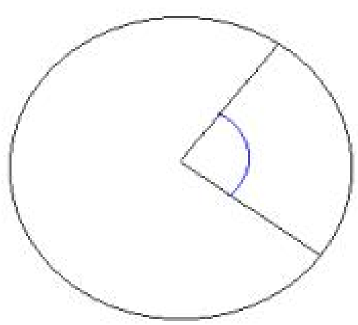
A la posición donde inicia el giro la semirrecta se le denomina lado inicial, y la posición que adopta al finalizar el giro se le llama lado terminal.



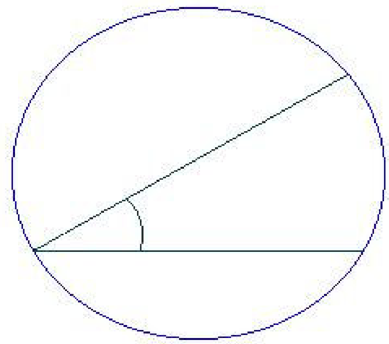
Se observa que en las tres definiciones existe un punto donde dos rectas se juntan, se tocan o se cruzan denominado ***vértice***. Por lo tanto podemos concluir que siempre que se junten dos rectas, existe un vértice y se formará un ángulo.

Ángulos de la circunferencia.

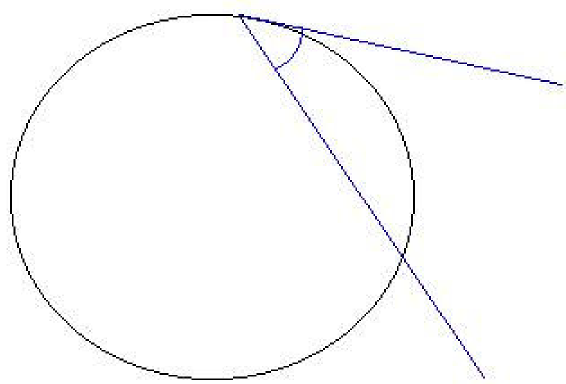
- ÁNGULO CENTRAL: Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.



- ÁNGULO INSCRITO. Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma.

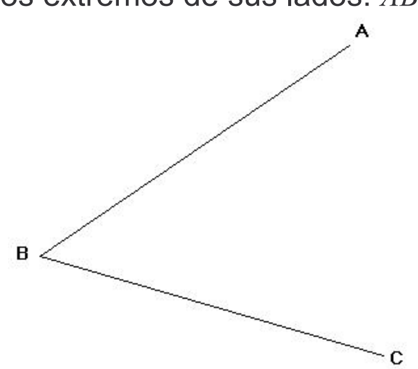


- ÁNGULO SEMI-INSCRITO. Es el que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es una tangente y el otro es una secante.

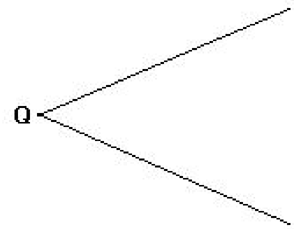


Para identificar o designar un ángulo se utilizan las notaciones siguientes:

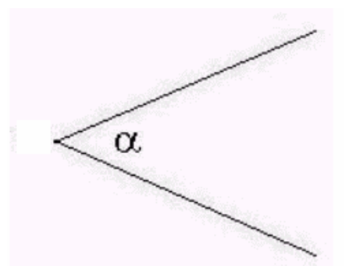
a) Con las letras de los extremos de sus lados: ABC o CBA



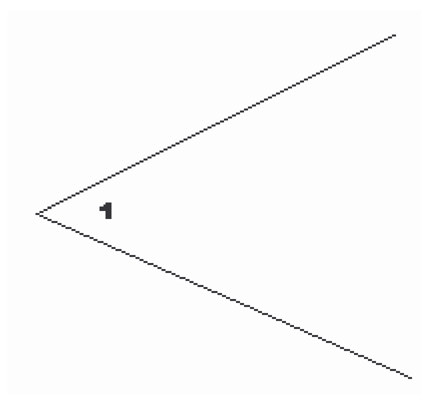
b) Con la letra de su vértice: Q



c) Con las letras minúsculas del alfabeto griego: α

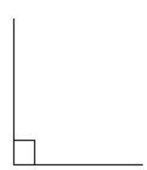


d) Un número que se escribe dentro del ángulo: **1**.

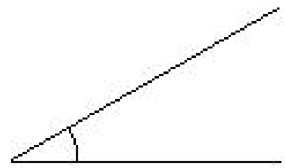


Por las posiciones relativas de sus lados inicial y terminal los ángulos se clasifican en:

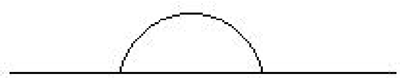
i) RECTO: si el lado inicial y el lado terminal son perpendiculares entre sí.



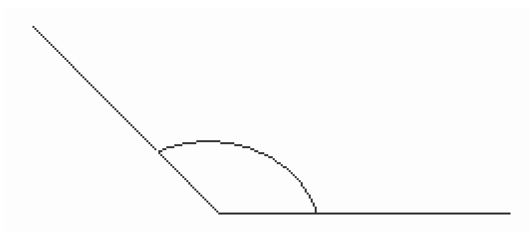
ii) AGUDO: cuando la abertura es menor que la de un ángulo recto.



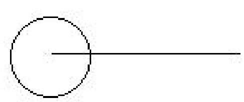
iii) LLANO: es el que equivale a la suma de 2 ángulos rectos; también se le llama ángulo lineal, el lado terminal es prolongación del lado inicial.



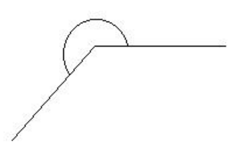
iv) OBTUSO: aquél cuya abertura es mayor que la de un ángulo recto y menor que la de un ángulo llano.



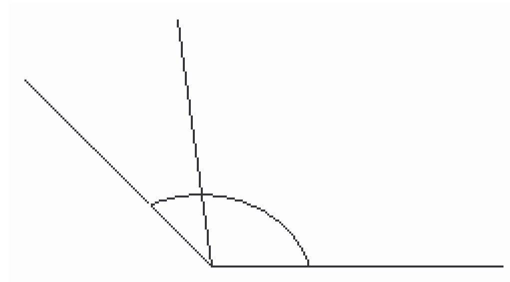
v) PERIGONO: también llamado de un giro, es el que el lado terminal coincide con la posición del lado inicial, luego de haber completado una vuelta. Es equivalente a la suma de 4 rectos o de 2 llanos.



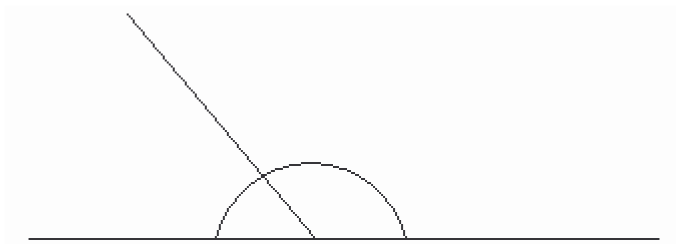
vi) ENTRANTE: es el que tiene una magnitud mayor que la del llano pero menor que la del perígono.



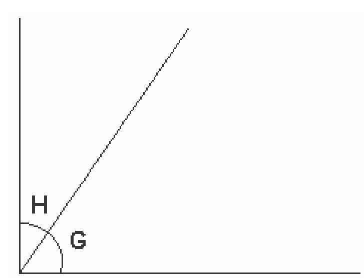
vii) CONSECUTIVOS o CONTIGUOS: son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.



viii) ADYACENTES: son dos ángulos consecutivos cuya suma es un ángulo llano.

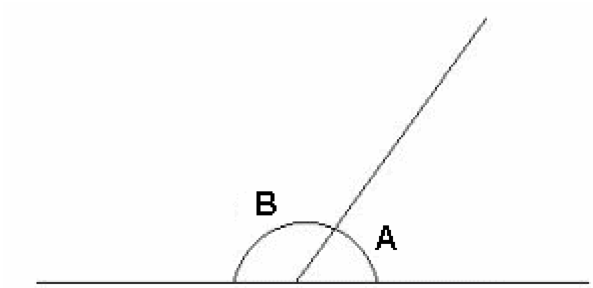


ix) ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS: son dos ángulos cuya suma equivale a un ángulo recto. G + H = un recto.



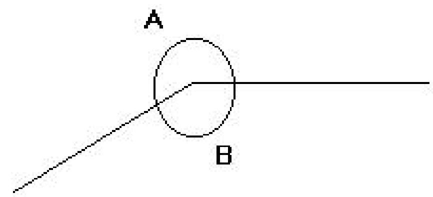
x) SUPLEMENTARIOS: son dos ángulos que sumados dan lugar a un ángulo llano.

A + B = un llano.



xi) CONJUGADOS: son dos ángulos cuya suma equivale a un **perígono**.

A + B = un perígono.



6.2 Sistemas de Medición.

Medir es comparar una magnitud con otra previamente establecida y aceptada a la que se le da el nombre de **patrón** o **unidad**. Así, por ejemplo, la unidad de medida de longitud en el sistema métrico decimal es el *metro*.

Cada patrón con sus respectivos múltiplos y submúltiplos forma lo que se conoce con el nombre de sistema. En el caso de los ángulos se conocen 3 sistemas de medición:

1) Sistema sexagesimal.

Al dividir una circunferencia en 360 ángulos centrales iguales, a cada uno de ellos se le denomina *grado*, que es la unidad de éste sistema.

A su vez cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos* y cada minuto se subdivide en otras 60 partes iguales denominadas *segundos*; esto es:

$$1° = 60', \quad y \quad 1' = 60''.$$

En este sistema existen dos formas de expresar un ángulo:

- *Forma entera*: cuando se escriben los grados seguidos de los minutos y de los segundos. Por ejemplo 48°23’17’’.
- *Forma decimal*: si el ángulo se expresa en grados y décimas de grado. Por ejemplo 37.2345°.

Para ir de la forma entera a decimal y viceversa se debe considerar lo siguiente:

i) Si cada minuto tiene 60 segundos, cualquier otra cantidad menor corresponde a una fracción de minuto, ejemplo: 30’’ es ½’, o en decimal 0.5’.

ii) De igual forma, si con 60 minutos se obtiene un grado, otra cantidad menor equivale a una fracción de grado: ejemplo 15' es ¼º, en decimal es 0.25°.

Ejemplo 1.1:

a) 29°36'15'' a forma decimal.

$$\frac{15}{60} = 0.25' \qquad 29° \ 36' + 0.25' = 29° \ 36.25'$$

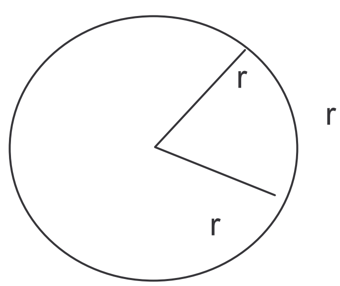
$$\frac{36.25}{60} = 0.6441° \qquad 29° + 0.6441° = \boxed{29.6441°}$$

b) 67.5435° a forma entera.

$$(0.5435)(60') = 67° \ 32.61'$$
$$(0.61)(60'') = 67° \ 32' \ 36.6''. \qquad = \boxed{67°32'36''}$$

2) Sistema cíclico.

En este sistema la unidad es el ***radian*** o ***radiante*** (abreviado **rad**), también llamada *unidad circular*, que está definido como: el ángulo central de una circunferencia cualquiera cuando el arco formado por dos de sus radios tiene la misma longitud que ellos.



Esta unidad carece de múltiplos o submúltiplos, se expresa en enteros y/o decimales.

Ejemplo 1.2

2 rad, 1.273 rad. 0.5678 rad.

3) Sistema centesimal.

Este sistema surge en Francia en un intento por unificar todas las unidades a un sistema decimal.

Al dividir una circunferencia en 400 ángulos centrales iguales, a cada uno de ellos se le denomina *gradían o grado centesimal*, que es la unidad de éste sistema.
A su vez cada grado se divide en 100 partes iguales llamadas *minutos* y cada minuto se subdivide en otras 100 partes iguales denominadas *segundos*.

Para diferenciar un gradián de un grado, se convino escribir una ***G*** a manera de superíndice en el número: (1^G).

$1^G = 100'$, $1' = 100''$.

Debido a lo anterior, cualquier ángulo se puede expresar en forma entera o decimal con los mismos números.

$56^G\ 34'\ 28'' = 56.3428^G$.

Existe otro sistema llamado militar, de poco uso en la práctica, que se menciona a continuación sólo como información general.

Debido a que en la ingeniería militar se requiere de una cierta precisión, en el ejército se convino en dividir en 6400 partes a la circunferencia y cada una de ellas recibe el nombre de ***milit***.

EQUIVALENCIAS Y CONVERSIONES.

Para establecer las equivalencias entre los tres sistemas descritos y poder así expresar un ángulo en cualquiera de ellos, se utilizará el esquema siguiente auxiliándonos de razones y proporciones. En la práctica los más comunes son el sexagesimal y el circular.

En las expresiones se considerará la siguiente simbología:
D $\rightarrow$ medida del ángulo en grados sexagesimales.
R $\rightarrow$ medida del ángulo en radianes.
G $\rightarrow$ medida del ángulo en grados centesimales (gradianes)

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi\ rad}.$$

Simplificando: $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\ rad}$. (1)

π Rad. = 180º

De igual forma se puede establecer las equivalencias entre los demás sistemas.

Ejemplo 1.3.

a) Convertir 77°34’25’’ a radianes.

Primero se expresa el ángulo en forma decimal:

$\frac{25}{60} = 0.4166'$ 34’+0.4166’ = 34.4166’.

$\frac{34.4166}{60} = 0.5736°$ 77°+0.5736° = <u>77.5736°</u>

Empleando la equivalencia correspondiente:

$$\frac{D}{180°} = \frac{R}{\pi \ rad}$$

$R = \frac{(D)(\pi)}{180°}$ sustituyendo: $R = \frac{(77.5736°)(\pi)}{180°} = 1.3539\, rad$

b) Convertir 1.3539 rad a grados, minutos y segundos.

Ahora con la equivalencia:

$$\frac{\text{D}}{180°} = \frac{\text{R}}{\pi \ \text{rad}}$$

$D = \frac{(R)(180°)}{\pi}$ Sustituyendo: $D = \frac{(1.3539)(180°)}{\pi} = 77.57°$

c) Convertir 1.2345 rad a gradianes.

Despejando *G* directamente de la formula correspondiente:

$G = \frac{(R)(200^G)}{\pi \ rad}$ y sustituyendo: $G = \frac{(1.2345\, rad)(200^G)}{\pi \ rad} = 78.5907^G$

NOTA: En el presente curso solo se utilizaran los sistemas sexagesimal y cíclico o circular.

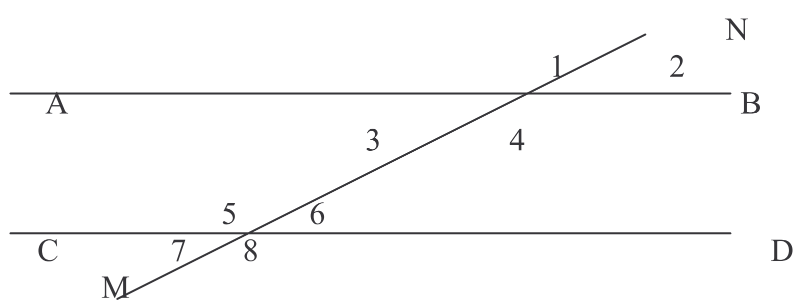
EJERCICIO 1.2.

Expresar la medida de los siguientes ángulos en el sistema indicado.

6. 23° 45’ 28” a decimal.
7. 0.8769 rad a grados en forma entera.
8. 97°56’30’’ a radianes
9. 129.45º. a grados en forma entera
10. 1.7689 rad a grados en forma entera.
11. 99.46º a grados en forma entera.
12. 136°48’ a decimal.
13. 110.23º a radianes.
14. Si π rad = 180º, expresar en términos de π los ángulos siguientes: 90º, 60º, 45º, 30º y 15º.
15. Si π rad = 180º, expresar los siguientes ángulos en grados: $\frac{3\pi}{2}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad, $\frac{\pi}{18}$ rad.

6.3 Ángulos formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante.

Sean AB y CD rectas paralelas y MN otra recta que corta oblicuamente a ambas.



En estas condiciones se forman ocho ángulos, cuatro internos que están entre las paralelas (3, 4, 5 y 6) y cuatro externos que se ubican fuera de ellas (1,2,7 y 8), los que se relacionan por parejas y se identifican de la forma siguiente:

A) ALTERNOS INTERNOS (AI): Son los que están entre las paralelas, en lados opuestos de la secante y en distinta paralela, (3 y 6, 4 y 5). Estos ángulos son iguales.

B) ALTERNOS EXTERNOS (AE): Son los que están por fuera de las paralelas, en lados opuestos de la secante y en distinta paralela, (1 y 8, 2 y 7). Estos ángulos son iguales

C) COLATERALES INTERNOS (CI): Son los que están dentro de las paralelas, en el mismo lado de la secante y en distinta paralela, (3 y 5, 4 y 6). Estos ángulos son suplementarios.

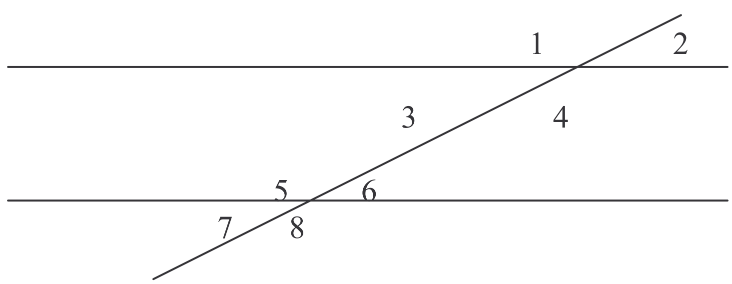
D) COLATERALES EXTERNOS (CE): Son los que están fuera de las paralelas, en el mismo lado de la secante y en distinta paralela, (1 y 7, 2 y 8). Estos ángulos son suplementarios.

E) OPUESTOS POR EL VÉRTICE (OV): Son los que tienen el vértice en común y los lados de uno de ellos son prolongación de los del otro, (1 y 4, 2 y 3, 5 y 8, 6 y 7). Estos ángulos son iguales.

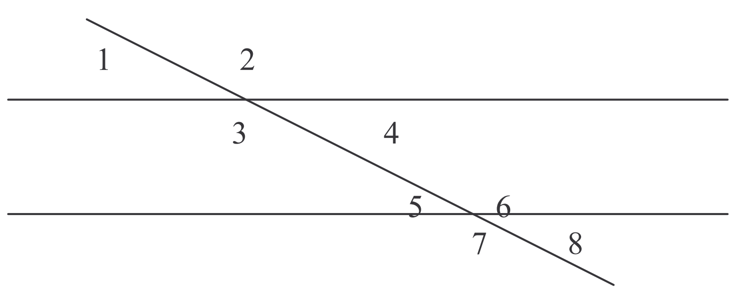
F) CORRESPONDIENTES (C): los que se ubican en distinta paralela, del mismo lado de ella y de la secante, (1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8). Estos ángulos tienen igual medida.

EJERCICIO 1.3:

16. Si el ángulo 2 de la siguiente figura mide 30º, ¿Cuánto miden los demás?



17. Si el ángulo 1 de la siguiente figura mide 2x + 30º y el ángulo 8 mide 5x, ¿Cuánto miden los demás?.



7. <u>Longitud de arco.</u>

La longitud de arco en una circunferencia es el segmento de la misma comprendido entre dos extremos de una cuerda.

Se calcula conociendo el valor del radio y el ángulo central entre dos radios, expresado este en radianes,

Empleando para ello la siguiente fórmula,

$$\boxed{S = (\theta)(r)}$$

S $\rightarrow$ longitud del arco (unidades de longitud)
θ $\rightarrow$ ángulo central, ***<u>en radianes</u>***.
r $\rightarrow$ medida del radio (unidades de longitud)

OBSERVACIÓN: la longitud del radio y el arco deben estar expresados en las mismas unidades de longitud.

Ejemplo 1.4

Un radio de 38 cm. intercepta un arco de 77.35 cm. Calcular el valor del ángulo central, en el sistema sexagesimal, en grados, minutos y segundos.

Despejando **θ** de la fórmula: $\theta = \frac{S}{r}$ y sustituyendo valores:

$\theta = \frac{77.35cm}{38cm} = 2.0355rad$. Pero como el ángulo debe expresarse en unidades del sistema sexagesimal, aplicando el concepto del apartado anterior:

$D = \frac{(R)(180°)}{\pi \ rad}$. Sustituyendo: $D = \frac{(2.0355rad)(180°)}{\pi \ rad} = 116.6271°$

Además:

(0.6271)(60) = 37.624’
(0.624)(60) = 37.44’’

el resultado final es, por lo tanto: **116°37’37’’**.

EJERCICIO 1.4.

18. Calcular la longitud del arco interceptado por un radio de 20 m al abrir un ángulo de 86°23'.

19. Determinar la longitud del radio que deberá tener una circunferencia para que al abrir un ángulo central de 52.58º intercepte un arco de 48.5 cm.

20. Calcular el ángulo central, en grados, minutos y segundos, que deberá abrir un radio de 125 m. para interceptar un arco de 76 m.

21. El minutero de un reloj mide 17 cm. Calcular la distancia que recorrerá su punta en un período de tiempo de 25 minutos.

22. Una rueda de bicicleta tiene un diámetro de 85 cm. Calcular: a) la distancia que recorrerá al dar dos vueltas y media; b) el ángulo, en radianes, que generará al avanzar 120 cm.

23. Las bicicletas utilizadas en las carreras olímpicas tienen ruedas cuyo radio es aproximadamente de 33 cm. ¿Cuántas revoluciones (vueltas) dará la una de las ruedas en una carrera de 5 Km.?

24. El péndulo de un reloj mide1.3m, al oscilar describe un ángulo de 23º 27´. Calcular la longitud de arco que describe en sus oscilaciones.

25. En un circulo cuyo radio tiene una longitud de 1.78 m., calcular la longitud del arco interceptado por un ángulo de ¼ rad.