UNIDAD VI

UNIDAD VI:	**APLICACION DE LA DERIVADA**. 10 Hs
OBJETIVO PARTICULAR	CONTENIDO
Al concluir la unidad el alumno: Identificara el concepto de derivada gráficamente y lo empleara para resolver varios problemas geométricos, físicos y sus aplicaciones	6.1.- Interpretación grafica de la derivada 6.1.1.- Pendiente de la tangente a una curva en un punto 6.2.- Tangentes y Normales 6.2.1.- Ecuación de la tangente a una curva en un punto 6.2.2.- Ecuación de la normal a una curva en un punto 6.3.- Funciones Crecientes y decrecientes. 6.3.1.- Condiciones de la derivada para que una función sea Creciente o Decreciente. 6.4.- Valores Extremos (Máximo y Mínimo) 6.4.1.- Criterios de la primera derivada para el análisis de los valores máximos y mínimos de una función. 6.5.- Concavidad de una curva.- 6.5.1.- Puntos de inflexión. 6.5.2.- Criterio de la segunda derivada para el calculo de los valores extremos. 6.6.- Aplicación de los valores extremos **La derivada como rapidez de variación**

OBJETIVO PARTICULAR:
Al concluir la unidad el alumno, Identificara el concepto de derivada gráficamente y lo empleara para resolver problemas geométricos, físicos y sus aplicaciones

6.1- INTERPRETACION GRAFICA DE LA DERIVADA

6.1.1 - Interpretación geométrica de la derivada

Sea la función $y = f(x)$ Tal como se muestra en la fig. (1)

Sea P un punto sobre la curva de coordenadas P(x_1,y_1), A toda variación de **x** representado por Δx = TS, corresponderá una variación de **y**, que se representa por Δy = RQ, con lo cual se pasa al punto Q de coordenadas (x_2, y_2), así:

$y = f(x)$

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Calculo el incremento (Δy)

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ RQ

Razón de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{QR}{TS} = \frac{QR}{PR}$

= Tg θ =

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = Tg ∠ QPR, representa el angulo de inclinacion de la recta secante a la grafica de la funciòn que pasa por los puntos P y Q

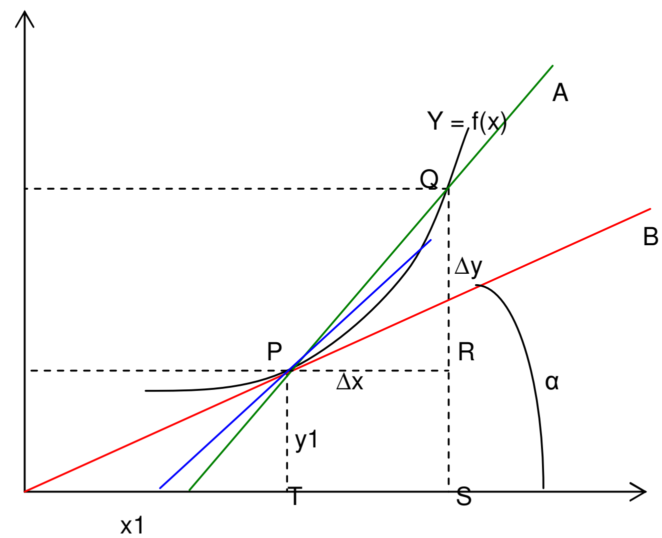


Fig 1

Note que:
(A) es la secante a la curva que pasa por P y Q
(B) es la tangente a la curva en el punto (P) al acercarse el punto (Q) hacia (P)
El incremento Δx se hará mas pequeño tanto como se quiera y cuando $\Delta x \to 0$ la secante girara y tendrá como limite la tangente, así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Tg } \alpha, = m$$

Que es la pendiente de la tangente en el punto (P).
Así se puede establecer el siguiente conclusión: desde el punto de vista geométrico
El valor de la derivada en cualquier punto de la curva, es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto.

$$m_{\tan} = \frac{dy}{dx} = y` = Tan\theta$$

Ejemplo 1.6
Sea la función:

$y = x^2$

Calcular la pendiente de la tangente cuando: x = 0, x = 1, x = 2
Como ya se sabe la derivada de:

$y = x^2$ es:

m = y' = 2x así: m = Tg θ

$y'(_0) = 2(0) = 0$ Tg θ = 0 θ = ∠Tg 0 = 0^0 Recta paralela al eje de las coordenadas

$y'(_1) = 2(1) = 2$ Tg θ = 2 θ = ∠Tg 2 = 63.43^0

$y'(2) = 2(2) = 4$ Tg θ = 4 θ = ∠Tg 4 = 75.96^0
$y'(3) = 2(3) = 6$ Tg θ = 6 θ = ∠Tg 6 = 80.53^0

Ejemplo 2.6
Calcular la pendiente de la tangente cuando: x = 0, x = 1, x = 2
Sea la ecuación, como se dan los datos de x, entonces se deriva con respecto a x

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

Como se dan los datos de x, entonces se deriva con respecto a x

$$m = y' = \frac{-x}{y} \qquad (2)$$

Calculo de y para los valores dados
De (1) se tiene: $y = \sqrt{25 - x^2}$

$$y_0 = \sqrt{25-0} = 5$$
$$y_1 = \sqrt{25-1^2} = \sqrt{24}$$
$$y_2 = \sqrt{25-2^2} = \sqrt{21}$$

$m_0 = \frac{-x}{y} = \frac{0}{5} = 0$ Tg θ = 0 θ = ∠Tg 0 = 0^0 Recta paralela al eje de las coordenadas
$m_1 = \frac{-x}{y} = \frac{-1}{\sqrt{24}} = -0.0416$ Tg θ = - 0.0416 θ = ∠Tg -0.0416 = 92.65^0
$m_2 = \frac{-2}{\sqrt{21}} = -0.436$ Tg θ = -0.436 θ = ∠Tg -0.408 = 116.19^0

Ejercicios 6.1
Hallar la pendiente de la tangente en el punto dado:

1.- $4x^2 + 2y^2 = 34$ Punto $(2,3)$ Sol. $m = \frac{-4}{3}$ $\theta = \angle Tg \frac{-4}{3} = -53.12^0$
2.- $x^2 + y^2 = 5^2$ Punto (4,3) Sol. $m = \frac{-4}{3}$ $\theta = \angle Tg \frac{-4}{3} = -53.12^0$
3.- $y = 8 - x^2$ Para x = 1 Sol. $m = -2$ $\theta = \angle Tg - 2 = -63.43^0$
4.- $y = \frac{4}{x+1}$ Para x = 1 Sol. $m = -1$ $\theta = \angle Tg - 1 = -45^0$
5.- $y = \frac{2}{x+3}$ Para x = 1 Sol. $m = \frac{-1}{8}$ $\theta = \angle Tg \frac{-1}{8} = -7.12^0$
6.- $y = (x^2 - x)^3$ Para x = 3 Sol. $m = 540$ $\theta = \angle Tg(540) = -89.89^0$
7.- $y = \sqrt{9 + 4x^2}$ Para x = 2 Sol. $m = In\det er\min ada$
8.- $y = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$ Para x = 3 Sol. $m = \frac{3}{64}$ $\theta = \angle Tg \frac{3}{64} = 2.68^0$
9.- $y = \frac{x^2 + 2}{2 - x^2}$ Para x = 2 Sol. $m = 4$ $\theta = \angle Tg(4) = 75.96^0$
10.- $y = x\sqrt{3 + 2x}$ Para x = 3 Sol. $m = 4$ $\theta = \angle Tg(4) = 75.96^0$

6.2.- TANGENTES Y NORMALES

6.2.1.- Ecuación de la tangente a una curva en un punto.-

Si la función $f(x)$ tiene derivada finita (existe en el punto x_0), $f'(x_0)$ en $x = x_0$ entonces la función $y = f(x)$ tiene una tangente en el punto $P(x_0,y_0)$ cuya pendiente es

$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = tg(\theta) = m$;

Recordemos de la geometría analítica que la ecuación de una recta en su forma de punto y pendiente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Por lo tanto, podemos emplear esta ecuación para calcular la tangente a una curva, considerando que P de coordenadas (x_0,y_0), es el punto de tangencia.

Cuando $m = 0$ entonces la curva tiene una tangente paralela al eje de las **x** ver los puntos (a, c) de la grafica.

Cuando $m = \infty$ entonces la curva tiene una tangente perpendicular al eje de las **x** ver el punto (b) de la grafica

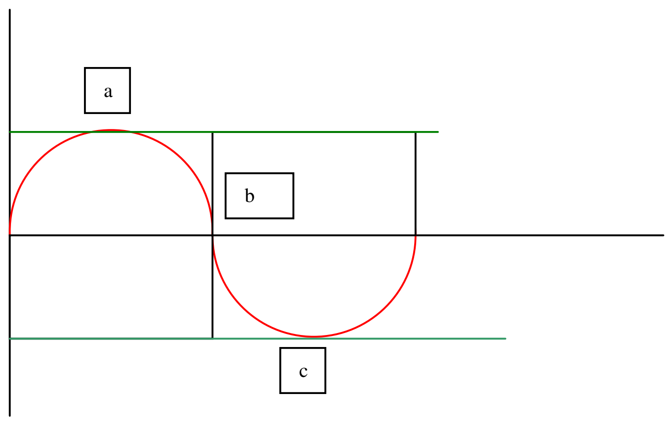


Fig 2

6.2.2.- Ecuación de la normal a una curva en un punto

Como la normal es la línea recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, se tiene que el valor de su pendiente es $m_n = -\frac{1}{m_t}$, entonces la ecuación de la normal es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_t}(x - x_0)$$

Ejemplo 3.6 : Hallar la ecuación de la tangente y la normal en el punto (2,2) de la función

$$y = x^3 - 3x$$

Derivando $y' = m = 3x^2 - 3$

Valorando para $x = 2$ $m = 9$

En la ecuación de la recta $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 2 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 16 = 0$$

Ecuación de la Normal $y - y_0 = -\frac{1}{m_t}(x - x_0)$

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 2)$$

$$x + 9y - 20 = 0$$

Ejercicio 6.2
Hallar la ecuación de la tangente y la normal en el punto dado:

1.- $4x^2 + 2y^2 = 34$ punto (2,3) Sol: $4x + 3y - 17 = 0$ $3x - 4y + 6 = 0$
2.- $x^2 + y^2 = 5^2$ punto (4,3) Sol. $4x + 3y - 25 = 0$ $3x - 4y - 4 = 0$
3.- $x^2 - y^2 = 7$ Punto (4,-3) Sol. $4x + 3y - 7 = 0$ $3x - 4y - 24 = 0$
4.- $9x^2 + 16y^2 = 52$ Para x = 2 Sol. $3x + 8y - 30 = 0$ $8x - 3y - 7 = 0$
5.- $y = x^{5/2}$ Para (4, 32) Sol. $20x - y - 48 = 0$ $x - 20y - 644 = 0$

Hallar el punto o los puntos en que la pendiente m = 0

6.- $4x^2 + 2y^2 = 34$ Sol: A (0, $\sqrt{17}$); B (0, - $\sqrt{17}$)
7.- $x^2 + y^2 = 5^2$ Sol. A (0, 5); B (0, -5)
8.- $y = x^4 - 6x^2 + 4$ Sol. A (0, 0); B ($\sqrt{12}$, 76)
9.- $y = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$ Sol. A (1, 0); B (0.5, 0.125)
10.- $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ Sol. A (1, 2); B (1.66, 1.85)

6.3.- **Funciones Crecientes y Decrecientes**.

6.3.1.- Condiciones de la derivada para que una función sea, **Creciente o Decreciente**.
Una función es creciente cuando el valor de la variable dependiente (y) **aumenta** al aumentar la variable independiente (x)
Una función es decreciente cuando el valor de la variable dependiente (y) **disminuye** al aumentar la variable independiente (x)

Una función **es creciente** en un punto cuando su derivada es **positiva**
Una función **es decreciente** cuando su derivada es **negativa.**

Ejemplo 6.3

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + 5$$

$$y' = x^2 - 5x + 4 \; = (x - 4) * (x - 1)$$

Para x < 1 (y') es positiva la función (y) es creciente
Para 1< x < 4 (y') es negativa la función (y) es decreciente
Para x > 4 (y') es positiva la función (y) es creciente

6.4.- **Valores Extremos (Máximo y Mínimo)**

6.4.1.- Criterios de la primera derivada para el análisis de los valores: M**áximos y Mínimos** de una función.

Como ya sabemos la derivada de una función nos define la pendiente de la tangente en un punto. Así, analizando la función

$y = x^3 - 3x^2$ Derivando

$y' = 3x^2 - 6x$

Calculando la pendiente de la tangente para x =:(-2, -1, 0 ,1, 2, 3, 4)

$y'_{(-2)} = 3(-2)^2 - 6(-2) = 12 + 12 = 24$ $\theta = arc,tg(24) = 87.61^0 \rightarrow (+)$ CRECIENTE

$y'_{(-1)} = 3(-1)^2 - 6(-1) = 3 + 6 = 9$ $\theta = arc,tg(9) = 83.65^0 - \rightarrow (+)$ CRECIENTE

$y'_{(-0)} = 3(0)^2 - 6(0) = 0 + 0 = 0$ $\theta = arc,tg(0) = 0^0 - — \rightarrow (*)$

$y'_{(1)} = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$ $\theta = arc,tg(-3) = -71.5^0 \rightarrow (-)$ DECRECIENTE

$y'_{(2)} = 3(2)^2 - 6(2) = 12 - 12 = 0$ $\theta = arc,tg(0) = 0^0 - — \rightarrow (*)$

$y'_{(3)} = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 19 = 9$ $\theta = arc,tg(9) = 83.65^0 \rightarrow (+)$ CRECIENTE

Nota: en los cálculos anteriores se observa que para (x = 0) y (x = 2), la pendiente de la tangente es cero. lo anterior nos indica que la pendiente antes y después de estos puntos, tiene un cambio de dirección ya que cambia de (+) a (-) y en el otro punto cambia de (-) a (+), que se interpreta como que hay un máximo y un mínimo en estos puntos.

Así: si se desea saber si en una función hay máximos y/o mínimos o no los hay, se efectúan los pasos siguientes.
1.- Obtener la función
2.- Derivar la función anterior
3.- Igualarla a cero y encontrar los valores que satisfacen esta igualdad.

EJEMPLO 6.5:

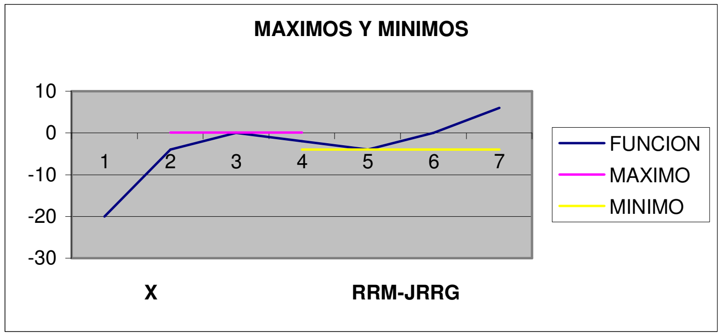
$y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x = 0$ $\quad x_1 = 0$, $x_2 = 2$

Se deduce que existe un máximo o mínimo para los valores anteriores.
Lo anterior lo podemos observar y comprobar si se grafica la función.

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	-20	-4	0	-2	-4	0

La grafica de la función es la siguiente:



MAXIMOS Y MINIMOS

Para determinar si existen máximos y/o mínimos en función, se efectúan los siguientes pasos

1.- Obtenga la función
2.- Encuentre la primera derivada de la función (y’).
3.- Iguale a cero la derivada que encontró.
4.- Obtenga los valores críticos de la función obtenida (y’) al derivar.

Primera forma:

a).- Asigne valores a la variable independiente, primero un poco menor al critico y substitúyalo en la primera derivada, encontrando así el valor de la pendiente de la tangente, observando solamente si es (+) o (-). Enseguida asigne valores a la variable independiente, un poco mayor al critico y sustitúyalo en la primera derivada, encontrando así el valor de la pendiente de la tangente, observando solamente si es (+) o (-).

b).- Analice si los valores de la pendiente, son **primero (+) y después (-)** para los valores menor y mayor al critico, entonces se trata de un **máximo**.

c).- Analice si los valores de la pendiente son **primero (-) y después (+)** para los valores menor y mayor al critico, entonces se trata de un **mínimo**

Segunda forma:

a).- Substituya el valor critico en la **función primitiva**, encuentre su valor.

b).-Asigne valores a la variable independiente, primero un poco menor al crítico y sustitúyalo en la función primitiva, **encontrando el valor de la función**, observando solamente **si es mayor o menor** que el del critico, enseguida asigne valores a la variable independiente, un poco mayor al valor critico y sustitúyalo en la función primitiva, **encontrando el valor** de la función, observando solamente **si es mayor o menor** que el del critico

c).- Analice los valores encontrados en el punto anterior.

Si ambos son menores entonces se trata de **un máximo**
Si ambos son mayores entonces se trata de **un mínimo**

Tercera forma

a).-Encuentre la segunda derivada

b).-Substituya en la segunda derivada los valores críticos obtenidos de la primera derivada.

c).- Si el resultado es **(+)**, para ese valor de la variable existe un **mínimo**

d).-Si el resultado es **(-),** para ese valor de la variable existe un **máximo**

Ejercicios 6.3

En las funciones siguientes encontrar los puntos en los que existe máximo o mínimo

1.- $y = x^3 - 3x^2$	Sol. A (0,0)M; B(2,-4)m
2.- $y = x^4 - 4x^3$	Sol. A (0,0)M; B(3,-27)m
3.- $y = x^3 + 4x^2 - 4x - 8$	Sol. A (0,0)m; B(-1.333, 2.07)M
4.- $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$	Sol. A (-0.8,-11.8)M; B(-11.19,-758)m
5.- $y = (2 - x)^3$	Sol. No existe
6.- $y = (x^2 - 4)^2$	Sol. A(0,16)M; B(2,0) m
7.- $y = x^2 + \frac{27}{x}$	Sol. No existe
8.- $y = -20 + 5x + 7x^2 + 2x^3$	Sol. A(-0.44, -21)m B(-1.9, -17.8)M
9.- $y = \frac{bx}{x^2 + b^2}$	Sol. A(b,0.5) M
10.- $y = \frac{x}{x+1}$	Sol. A(1,2) M

Sentido de concavidad

Concavidad.- que tiene un arco.- (hueco en cuerpo sólido o vació)

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen una concavidad en sentidos opuestos.

Un punto donde una curva cambia su dirección de concavidad se llama punto de inflexión

Para obtener el punto de inflexión de una función se siguen los pasos que a continuación se citan:

a).- Obtenga la primera derivada

b).- Obtenga la segunda derivada

c).- Igualar a cero la segunda derivada y obtener los valores críticos de la segunda derivada, (valores que satisfacen la ecuación).

d).- Asigne valores a la variable independiente, primero un poco menor al critico encontrado en el punto anterior, y substitúyalo en la segunda derivada, observando solamente si es (+) o (-). En seguida asigne valores a la variable independiente un poco mayor al critico y substitúyalo en la segunda derivada, observando solamente es (+) o (-)

e).- Si primero es (+) y después (-) o primero es (-) y después (+), entonces existe un punto de inflexión para los valores encontrados en la segunda derivada.

Concavidad.

Para determinar la concavidad de una curva (funcion) se siguen los pasos que a continuación se citan:

a).- Analice si los valores de la pendiente: **es primero (+) y después (-)** para los valores **menor y mayor** al critico, entonces existe un **máximo** y es **cóncava hacia abajo**.

b).- Analice si los valores de la pendiente **es primero (-) y después (+)** para los valores **menor y mayor** al critico, entonces existe un **mínimo** y es cóncava hacia **arriba**

c).- **Cuando f''(x) es (+) la curva es cóncava hacia arriba**

d).- **Cuando f''(x) es (-) la curva es cóncava hacia abajo**

Ejemplos a resolver:

- En las funciones siguientes encontrar los puntos en los que existe máximo o mínimo y deducir si es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo y encontrar el punto de inflexión si existe

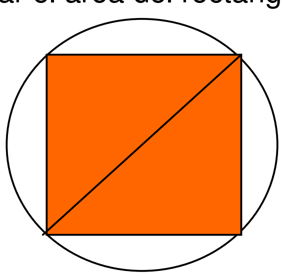
1.- $y = 1 - 3x + 5x^2 - x^3$ Sol. Creciente (1/3 a 3); Decreciente (ά a 1/3) y de (3 a ά)
PI (5/3, 142/27) Max ((3,10) min(1/3, 14/27)

2.- $y = x^4 - 4x^3$ Sol. Puntos de inflexión (0,0) y (2,16)

APLICACIÓN DE MAXIMOS Y MINIMOS A PROBLEMAS PRACTICOS

La aplicación de la derivada puede ser por ejemplo a problemas que implique analítica (puentes), geometría (Área, Volumen) Físicos (velocidad, inducción), Economía (eficiencia, costos) etc.

Calcular el área del rectángulo máxima que se puede inscribir en un circulo de radio r = 5 cm



De la figura
Si r= 5, d = 10 cm
La hipotenusa del rectángulo es el diámetro
La longitud de un cateto es x
La longitud del otro cateto es: y $= \sqrt{100 - x^2}$

El área del rectángulo es:
$A_r = x*y$

$$Ar = x * \sqrt{100 - x^2}$$

Para máximo o mínimo, se deriva el área anterior

$$\frac{d(Ar)}{dx} = \frac{d(x\sqrt{100 - x^2})}{dx}$$

$$A' = \frac{x*(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}\,(1)$$

$A' = \dfrac{-x^2 + 100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$ se iguala a cero para encontrar máximo o minimo

$100 - 2x^2 = 0$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{100}{2}} = \pm\sqrt{50} = \pm 7.071$

Solo se toma el valor positivo ya que el negativo carece de sentido por la naturaleza del problema.

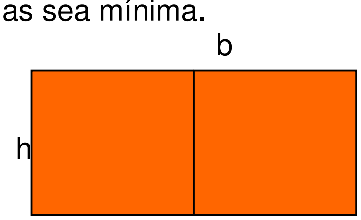
En base a al calculo del signo de la derivada deducir si es máximo o mínimo

$y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = 7.071$

Conclusión: Es un rectángulo.

Tarea extra clase: Hacer la deducción de la fórmula general

7.- Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividirlo en dos parcelas por otra valla paralela a uno de sus lados. Si el área del campo es de 2400 m^2 hallar la razón de los lados y la longitud de cada uno de ellos para que la longitud total de las vallas sea mínima.



	De la figura	
Área del rectángulo	A = b h	A = 2400
Altura	,h = A/b = 2400/b	
Longitud de vallas	P = 2b + 3 h	
Sustituyendo	P = 2b + 3A/b	

Derivando la longitud de vallas P con respecto a (b), siendo A el área total para obtener una fórmula general para este caso en particular:

$\dfrac{d(P)}{db} = P' = \dfrac{d(2 + 3A)}{b} = 2 + \dfrac{(-3A)}{b^2} = 0$

$2b^2 = 3A$, $b = \sqrt{\dfrac{3A}{2}}$ como $h = \dfrac{A}{b} = \dfrac{A}{\sqrt{\dfrac{3A}{2}}}$

Razón $\dfrac{h}{b} = \dfrac{\dfrac{A}{\sqrt{\dfrac{3A}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{3A}{2}}} = \dfrac{A}{\dfrac{3A}{2}} = \dfrac{2}{3}$

Fórmula general $h = \dfrac{2b}{3}$

En forma particular $h = \frac{2400}{b} = \frac{2b}{3}$ resolviendo la ecuación anterior

$b = \sqrt{\frac{3*2400}{2}} = 60$ m. $h = 40$ m.

DERIVADA COMO RAPIDEZ DE VARIACIÓN

SEA LA FUNCIÓN $y = x^2$

DANDO LOS RESPECTIVOS INCREMENTOS $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

EL INCREMENTO ES $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$

LA RAZÓN DE INCREMENTOS $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ES LA RAPIDEZ MEDIA DE VARIACIÓN DE (y) CON RESPECTO A (x)

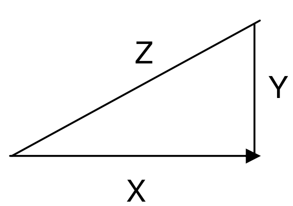
CUANDO $\Delta x \to 0$ Y TOMANDO LÍMITES:

$\frac{dy}{dx} =$ ES LA RAPIDEZ INSTANTANEA DE LA VARIACIÓN DE y CON RESPECTO A (x) PARA UN VALOR DE x DEFINIDO

ASI: CUANDO (S) ES LA DISTANCIA MEDIA EN UNA RECTA DADA Y ΔS ES UN INCREMENTO DADO EN UN INCREMENTO DE TIEMPO Δt, LA RAZÓN DE INCREMENTOS $\Delta S / \Delta t$ = **VELOCIDAD MEDIA** Y dS / dt **, ES LA VELOCIDAD EN UN INSTANTE CUALQUIERA.**

ASI LA VELOCIDAD SE PUEDE DEFINIR **COMO: LA RAPIDEZ DE CAMBIO** DE (S) CON RESPECTO A (t), (AL TIEMPO). EN UN INSTANTE CUALQUIERA COMO EL LÍMITE DE LA VELOCIDAD MEDIA CUANDO Δt TIENDE A CERO

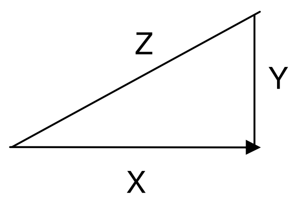
EJEMPLO:
UN HOMBRE CAMINA A 7.5 Km /HORA HACIA LA BASE DE UNA TORRE, QUE TIENE 18 m DE ALTURA. CON QUE RAPIDEZ SE ACERCA A LA CIMA DE LA TORRE CUANDO SU DISTANCIA A LA BASE DE LA TORRE ES DE: a) 24 m, b)18 m, c)1m

<table>
<tr>
<td>X = Variable
Y = Constante
Z = Variable

</td>
<td>EN LA FIGURA
a).- $X = 24, \ldots\ldots Y = 18, \ldots\ldots Z = \sqrt{24^2 + 28^2} = 30$ m
$Z^2 = X^2 + Y^2$ DERIVANDO CON RESPECTO AL TIEMPO (t) EN FORMA IMPLICITA
$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) ES CONSTANTE
$\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0$ $Vx = \frac{dX}{dt} = 7.5$
$Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{24}{30}(7.5) = 6$ Km/hora
b).- $X = 18 \ldots\ldots Y = 18, \ldots\ldots Z = \sqrt{18^2 + 18^2} = 25.45$ m
$Z^2 = X^2 + Y^2$ DERIVANDO CON RESPECTO AL TIEMPO (t)
$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) ES CONSTANTE</td>
</tr>
</table>

	$\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0 \qquad Vx = \frac{dX}{dt} = 7.5$ $Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{18}{25.45}(7.5) = 5.30$ Km/hora c.- $X = 1......Y = 18,......Z = \sqrt{1^2 + 18^2} = 18.02$ $Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{1}{18.02}(7.5) = 0.416$

Ejemplo.-

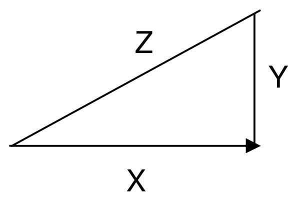
UN BOTE ESTA ATADO A UNA CUERDA QUE ESTA ARROLLADA ALREDEDOR DE UN TORNO SITUADO A 7m MAS ALTO QUE EL NIVEL DEL PUNTO EN QUE LA CUERDA ESTA AMARRADA AL BOTE. EL BOTE SE ALEJA A UNA VELOCIDAD DE 3m/seg. CONQUE RAPIDEZ SE DESARROLLA EL CORDEL CUANDO DISTA 10 m DEL PUNTO QUE ESTA DIRECTAMENTE DEBAJO DEL TORNO Y AL NIVEL DEL AGUA.

X = Variable Y = Constante Z = Variable 	En la figura $X = 10,......Y = 7,......Z = \sqrt{10^2 + 7^2} = 12.20$ m $Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t) $2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) es constante $\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0$ $Vx = \frac{dX}{dt} = 3$ $Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{10}{12.20}(3) = 2.46$ m/seg.

Ejemplo

UN LANCHON SE ACERCA A UN MUELLE MEDIANTE UN CABLE ARROLLADO A UN ANILLO QUE SE ENCUENTRA EN LA PARTE SUPERIOR DEL MUELLE; EL CABLE SE ENRROLLA CON UN TORNO SITUADO EN LA CUBIERTA DEL LANCHÓN A RAZÓN DE 2.4m/min. LA CUBIERTA DEL LANCHÓN ESTA A 4.5 m POR DEBAJO DE LA PARTE SUPERIOR DEL MUELLE. CONQUE RAPIDEZ SE MUEVE EL LANCHÓN HACIA EL MUELLE CUANDO DISTA 6m.

X = Variable
Y = Constante
Z = Variable



En la figura:

$X = 6, ...Y = 4.5, ...Z = \sqrt{6^2 + 4.5^2} = 7.5$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) Es constante

$\frac{dX}{dt} = \frac{2Z}{2X}\frac{dZ}{dt} + 0$

$Vz = \frac{dZ}{dt} = 2.4$

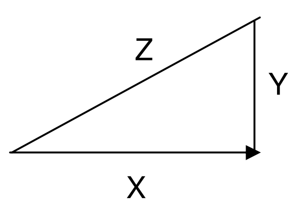
$Vx = \frac{dX}{dt} = \frac{7.5}{6}(2.4) = 3$ m/mIn

Ejemplo

UNO DE LOS EXTREMOS DE UNA ESCALERA DE 15 m, SE APOYA CONTRA UNA PARED VERTICAL, LEVANTADA EN UN PISO HORIZONTAL. SUPONGA QUE SE EMPUJA EL PIE DE LA ESCALERA ALEJÁNDOLA DE LA PARED A RAZÓN DE 0.9 m/min.

a) CON QUE VELOCIDAD BAJA LA EXTREMIDAD SUPERIOR DE LA ESCALERA CUANDO SU PIE DISTA 4 m DE LA PARED.
b) CUANDO SE MOVERAN A LA MISMA VELOCIDAD LOS DOS EXTREMOS DE LA ESCALERA.
c) CUANDO BAJA LA EXTREMIDAD SUPERIOR DE LA ESCALERA A RAZÓN DE 1.2 m/min.

X = Variable
Y = Variable
Z = Constante



En la figura:

a).- $X = 4......Z = 15, ...Y = \sqrt{15^2 - 4^2} = 14.45$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Z) Es constante

$0 = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$

$Vx = \frac{dX}{dt} = 0.9$

$Vy = \frac{dY}{dt} = -\frac{4}{14.45}(0.9) = 0.25$ m/mIn

b).- Para que se muevan a la misma velocidad los extremos de la escalera:

$Vx = Vy$

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Z) Es constante.

	$0 = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ $\frac{Vx}{Vy} = 1 = -\frac{Y}{X}$ Por lo que $\lvert X \rvert = \lvert Y \rvert$ $15^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$ $X^2 = \sqrt{\frac{15^2}{2}}$ $X = 10.60$ m $Y = 10.60$ m c).- Cuando baja la extremidad superior de la escalera a razón de 1.2 m/min $\frac{Vx}{Vy} = \frac{0.9}{1.2} = -\frac{Y}{X}$ $Y = 0.75X$ $15^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^2 + (0.75X)^2}$ $X = 12$ m $Y = 9$ m

Ejemplo

18.-PAG 103.UNA PELOTA SE LANZA VERTICALMENTE HACIA ARRIBA, SE MUEVE SEGÚN LA LEY (S=25t – 5t²). S = m. Y t = seg. : HALLAR:

a) SU POSICIÓN Y VELOCIDAD DESPUÉS DE 2 seg. Y DESPUÉS DE 3 seg.
b) HASTA QUE ALTURA ASCENDERA
c) A QUE DISTANCIA SE MOVERA EN EL CUARTO seg. Y EN EL QUINTO seg.

a).- $S = 25t - 5t^2$

PARA t = 2 seg: $S = 25(2) - 5(2)^2 = 50 - 20 = 30$ m.

$$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t$$

$$Vs = 25 - 10(2) = 25 - 20 = 5 \text{ m/seg.}$$

PARA t = 3 seg $S = 25(3) - 5(3)2 = 75 - 45 = 30$ m.

$$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t$$

$$Vs = 25 - 10(3) = 25 - 30 = -5 \text{ m/seg.}$$

b):_ PUNTO MÁXIMO

$$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t = 0$$

$$t = \frac{25}{10} = 2.5 \text{ seg:}$$

$$S\max. = 25t - 5t^2 = 25(2.5) - 5(2.5)^2 = 62.5 - 32.5$$

$$S\max = 31.25 \text{ m:}$$

c).- $S = 25t - 5t^2$

PARA t = 4 seg: $S = 25(4) - 5(4)^2 = 100 - 80 = 20$ m.

PARA t = 5 seg: $S = 25(5) - 5(5)^2 = 25 - 25 = 0$ m.

20.- PAG 103. LA ALTURA S = m. ALCANZADA EN t=seg. POR UN CUERPO LANZADO VERTICALMENTE HACIA ARRIBA CON UNA VELOCIDAD V = m/seg.: ESTA DADA POR LA FORMULA S = V_1t – (1/2)gt^2 OBTERNER UNA FORMULA PARA LA MAYOR ALTURA QUE EL CUERPO ALCANZA

$$S = V_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{dS}{dt} = V_1 - gt$$

$$S = V_1 \frac{V_1}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_1}{g}\right)^2 = \frac{V_1^{\ 2}}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_1^{\ 2}}{g}$$

$$S = \frac{V_1^{\ 2}}{2g}$$

Las aristas de un tetraedro regular miden 10 cm. Si aumenta 0.1 cm por minuto, calcular la rapidez de aumento del volumen.

Como la única dimensión es la arista, el volumen hay que darlo en función de la arista, sabiendo que el volumen de un tetraedro es: $V = \frac{B*h}{3}$

De la figura se puede obtener que:

$$h = \sqrt{D^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{D^2 - \frac{D^2}{4}}$$

$$h = D\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Área de la base $= B = \frac{D*h}{2}$ = $\frac{D*D}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$ = $\frac{D^2}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$

Por ser un tetraedro la altura del tetraedro es $h = D\sqrt{\frac{3}{4}}$

Así el volumen de tetraedro expresado en función de su arista es:

$$V = \frac{B*h}{3} = \frac{1}{3} * D^2 * \sqrt{\frac{3}{4}} * D\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{D3}{8}$$

$V = \frac{D^3}{8}$ Formula del volumen de un tetraedro en función de su arista

La derivada sera

$V^1 = \frac{3D^2}{8}\frac{d(D)}{dt}$ subst valores D = 10 y $\frac{d(D)}{dt} = 0.1$

V^1 = 3*(10)^2 * 0.1/8 = 30/8 = 15/4

Ejercicio 6.7

1.- Se desea construir una caja abierta rectangular por la parte superior que contenga 2000 cm^3 de volumen, cuales deben ser las dimensiones para que el costo de hacerla con lámina sea mínimo. Sol. $X = 15.87$ $H = 7.93$ cm

2.- Se desea construir un baño rectangular contenga 18 m^3 de volumen, cuales deben ser las dimensiones para que el costo de hacerlo sea mínimo. Si el piso cuesta \$200 m^2 y los muros \$100 m^2, no incluye el techo Sol. $X = 2.62$ $H = 2.62$ m

3.- Una escalera ha de pasar por el borde superior de un muro de 1.m de altura y apoyarse en sobre una pared de H metros de altura. Si el muro y la pared distan 1.5 m. Hallar la longitud mínima de la escalera. Sol. $S = 3.51$ m

4.- Un persona de 1.8 m. de altura camina a 0.5 m/seg. Alejándose en línea recta de la luz de una luminaria que esta a 6 m. de altura sobre el suelo. A).- Con que velocidad esta cambiando la longitud de su sombra. Sol. $Vx = 0.21$ m/seg.

5.- Un niño esta haciendo volar una cometa a 50 m de altura. Si la cometa se mueve horizontalmente alejándose del niño a una velocidad de 4 m/seg. a) A que velocidad esta soltando sedal cuando el cometa esta a 250 m de el. Considere la altura constante.
Sol. $Vz = 3.92$ m/seg.

6.- Se esta vaciando a razón de 10 cm^3/seg un deposito cónico con su punta hacia abajo. Si es de 20 cm de radio y 50 cm de altura. A que ritmo esta bajando el nivel del agua cuando la altura tomada de la parte baja es de 30 cm. Sol. $Vh = 0.022$ cm./seg

7.- Un proyectil se lanza con una velocidad inicial $Vo = 200$ m/seg y con un Angulo de inclinación de 60º. Calcular: a). Distancia máxima (X) alcanzada, b).- Altura máxima (H) alcanzada, c).-Tiempo en alcanzar distancia máxima. (tx), d).-Tiempo en alcanzar altura máxima. e).- Calcular para $t = 5$ seg. La rapidez y dirección del proyectil. Sol:
$X = 3531$ m, $H = 1529$ m, $t(x) = 35.31$ seg, $t(y) = 17.66$ seg. $Vz = 159.42$ m/seg. Ə= 51.15º.