

**CENTRO DE BACHILLERATO Y SECUNDARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

MATERIA	MATEMATICAS IV		
CLAVE	SEMESTRE	PLAN DE ESTUDIOS	
12043	4°	2004	
CREDITOS	6	FECHA DE ACTUALIZACIÓN	FEBRERO DE 2004
HORAS TEORICAS	1		
HORAS PRACTICAS	4		

DESCRIPCION GENERAL

Durante el curso el alumno conocerá los conceptos de: variable, función, y límite, evaluando los dos últimos y los aplicara en las derivadas de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, haciendo énfasis en problemas de máximos y mínimos.

OBJETIVO GENERAL.

Al finalizar el curso el alumno Identificara los conceptos: variable, función y límite, será capaz de emplear estos últimos para calcular la derivada.

Calculara derivadas de diversos tipos de funciones: algebraicas, circulares directas, circulares inversas, exponenciales y logarítmicas.

Aplicara la derivada a problemas geométricos y físicos, haciendo énfasis en problemas de máximos y mínimos.

UNIDAD V: DERIVADAS IMPLICITAS Y DERIVADAS SUCESIVAS	
OBJETIVO PARTICULAR	CONTENIDO
Al concluir la unidad el alumno Aplicara las reglas de derivación cuando la función sea implícita o bien cuando sea resultado de otra derivación	5.1.- Derivada de funciones implícitas. 5.1.1 Derivación implícita de funciones algebraicas y trascendentes. 5.2 Derivadas Sucesivas 5.2.1 Derivadas sucesivas de funciones algebraicas y circulares

5.1- DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

5.1.1.- Derivación implícita de funciones algebraicas y trascendentes.

Cuando se da una relación entre dos o más variables y la función dada no esta resuelta para una de las variables, entonces se le llama función implícita.

Cuando en una expresión algebraica, se encuentra despejada una variable se dice que esta en forma explícita. $y = x^2 + 2x - 4$

En algunas ocasiones tenemos relación de dos o más variables en la cual no esta despejada ninguna variable, en este caso se dice que esta en forma implícita, $x^2 + y^2 = r^2$

En los temas anteriores se vio como derivar funciones explicitas, pero no siempre es fácil despejar una variable para poderla derivar, ejemplo

$$y^3 - 3x^2 + yx = 0.$$

Para derivar la expresión anterior se siguen los siguientes pasos:

1º.- Se designa la variable con respecto a la que se va a derivar (x, t...) y se designan cuales son constantes.

2º.- Se deriva término a término, aplicando las reglas vistas en los temas anteriores (reglas generales), en la expresión anterior el primer término es exponencial, el segundo exponencial y el tercer término es un producto de funciones.

3º.- Se despeja la derivada que se desea calcular:

Ejemplo: 1.5

Sea la función implícita

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1º.- Derivar con respecto a (x), considere (r) constante

2º.- Derivando termino a termino

$$2x \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

3º.- Despejando $\frac{dy}{dx} = y'$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Note que la expresión resultante se encuentra en termino de (x,y), en algunas ocasiones esto resulta incomodo, pero como generalmente la derivada la utilizamos para encontrar la pendiente en un punto en el que son conocidas las coordenadas (x,y), no tendremos dificultad.

Así, si se desea calcular el valor de la derivada en el punto (3, 4), entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$

Ejemplo: 2.5

Sea la función implícita

$$y^3 - 3x^2 + yx = 0$$

1º.- Derivar con respecto a (x).

2º.- Derivando termino a termino

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 6x \frac{dx}{dx} + y \frac{dx}{dx} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

3º.- Despejando $\frac{dy}{dx} = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - y}{3y^2 + x}$$

Si la función anterior se deriva con respecto a (y)

Se tiene que

$$y^3 - 3x^2 + yx = 0$$

1º.- Derivar con respecto a (y).

2º.- Derivando termino a termino

$$3y^2 \frac{dy}{dy} - 6x \frac{dx}{dy} + y \frac{dx}{dy} + x \frac{dy}{dy} = 0$$

3º.- Despejando $\frac{dx}{dy} = x'$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2 + x}{6x - y}$$

Se concluye que son reciprocas

Ejercicios: 5.1 A resolver.-

Encontrar la derivada con respecto a la variable que se indica

- | | | |
|--|-----------------------------|---|
| 1.- $y^2 = 2px$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = p / y$ |
| 2.- $10x = 10y + 5y^2 + 5y^3$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = 10 / (10 + 2y + 15y^2)$ |
| 3.- $\text{sen } \theta + \cos \theta = r$ | con respecto a (θ) | Sol. $r' = \cos \theta - \text{sen } \theta$ |
| 4.- $y^2 = 2px$ | con respecto a (y) | Sol. $x' = y / p$ |
| 5.- $x^3 + y^3 = 2xy$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = (2y - 3x^2) / (3y^2 - 2x)$ |
| 6.- $x^2 - xy + y^3 = 8$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = (y - 2x) / (3x^2 - x)$ |
| 7.- $\cos(x - y) = xe^x$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = \frac{e^x(1+x) + \text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x-y)}$ |
| 8.- $x \cos y + y \cos x = 1$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = \frac{y \text{sen} x - \cos y}{\cos x - x \text{sen} y}$ |
| 9.- $x \text{sen} y + \cos 2y = \cos y$ | con respecto a (x) | Sol. $y' = \frac{-x \cos y + \text{sen} y}{\text{sen} y - 2 \text{sen} 2y}$ |

10.- $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$ con respecto a (x) Sol. $y' = \frac{\frac{-y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{x}{2\sqrt{xy}}}$

5.2.- Derivadas sucesivas de una función

5.2.1.- Derivadas sucesivas de funciones algebraicas y trascendentes

Cuando se tiene una función $y = f(x)$ puede ocurrir que al derivar esta función $\frac{dy}{dx} = y'$ se tenga una nueva función que a su vez también se pueda derivar; en este caso a la derivada de la primera derivada se le llama segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$.

Análogamente, la derivada de la segunda derivada se le llama tercera derivada $\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$ y así sucesivamente hasta la enésima derivada.

Generalizando la idea anterior, las derivadas sucesivas las podemos representar de diferente manera .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = f_{xx} = D^2y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) = f_{xxx} = D^3y$$

Ejemplo 4.5

$y = 3x^4$	Función inicial
$\frac{dy}{dx} = y' = 12x^3$	Primera derivada
$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 36x^2$	Segunda derivada
$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = 72x$	Tercera derivada
$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{IV} = 72$	Cuarta derivada

Ejemplo 5.5

$y = 3x^4 - 2x^3 + 6x$	Función inicial
$\frac{dy}{dx} = y' = 12x^3 - 6x^2 + 6$	Primera derivada
$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 36x^2 - 12x$	Segunda derivada

Ejemplo 6.5

$x^2 + y^2 = r^2$	Función
$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x}{y}$	Primera derivada
$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{r^2}{y^3}$	Segunda derivada

Ejemplo 7. 5

$y = \text{sen}(x)$	Función
$\frac{dy}{dx} = y' = \text{cos}(x)$	Primera derivada
$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\text{sen}(x)$	Segunda derivada
$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = -\text{cos}(x)$	Tercera derivada
$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{IV} = \text{sen}(x)$	Cuarta derivada
Se cicla	

Ejercicios 5.2 a resolver.-
 Encontrar la segunda derivada de:

- | | | |
|---|--------------------|---|
| 1.- $V = \frac{4}{3}\pi * r^3$ | con respecto a (r) | Sol. $V'' = 8\pi r$ |
| 2.- $y = 4x^3 - 2x^2 - x + 5$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = 24x - 4$ |
| 3.- $x^2 + y^2 = r^2$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = \frac{-r^2}{(r^2 - x^2)y}$ |
| 4.- $\text{sen}\theta + \cos\theta = r$ | con respecto a (r) | Sol. $\theta'' = \frac{\text{sen}\theta + \cos\theta}{(\cos\theta - \text{sen}\theta)^3}$ |
| 5.- $A = \frac{L^3}{2}$ | con respecto a (L) | Sol. $A'' = 3L$ |
| 6.- $y = \sqrt{\text{sen}x}$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = \frac{1}{2}(\cot^2 x - 1)$ |
| 7.- $y = \tan x + x^3$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = 2\sec^2 x * \text{tg}x + 6x$ |
| 8.- $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = 0$ |
| 9.- $y = \ln \cos x$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = -\sec^2 x$ |
| 10.- $y = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ | con respecto a (x) | Sol. $y'' = \frac{-(x+2)}{(2x+1)^{5/2}}$ |