UNIDAD IV: DERIVACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES 12 hrs.	
OBJETIVO PARTICULAR	**CONTENIDO**
Al concluir la unidad el alumno: Aplicará las reglas para la derivación de las funciones trascendentes.	4.1. Reglas para derivar a las funciones circulares directas. 4.1.1. Función sen x. 4.1.2. Función cos x. 4.1.3. Resto de las funciones circulares con base en las anteriores. 4.2. Funciones circulares inversas. 4.3. Propiedades de los logaritmos. 4.3.1. El número ***e*** como limite y logaritmos naturales. 4.4. Derivada de funciones logarítmicas. 4.5. Función exponencial y su derivada. 4.6. Derivada de funciones algebraicas y circulares aplicando las propiedades de los logaritmos.

Objetivo Particular:

Al concluir la unidad el alumno aplicará las reglas para la derivación de las funciones trascendentes.

INTRODUCCIÓN

Al estudiar el concepto de función se habló de la regla de correspondencia entre variables y se particularizó en el estudio de las funciones llamadas algebraicas, en la presente unidad se estudiará el caso de las funciones llamadas trascendentes.

Para tratar este tema es necesario precisar que la definición de Función Trascendente está expresada por exclusión respecto de las funciones de tipo algebraico y ésta es:

“Se le llama función trascendente a toda función que no es del tipo algebraico”.

Y se dice que una Función Algebraica es aquella que puede ser expresada en términos de sumas, restas, productos, cocientes o raíces, de carácter finito, de funciones polinomiales. En tanto que una función trascendente es aquella en la cual la relación entre las dos variables se hace mediante el empleo de un símbolo: *Sen*, *ArcTan*, *ln*, etc.

Las Funciones de tipo Trascendente incluyen:

- Funciones Circulares Directas e Inversas (también llamadas Funciones Trigonométricas)
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas
- Funciones Hiperbólicas

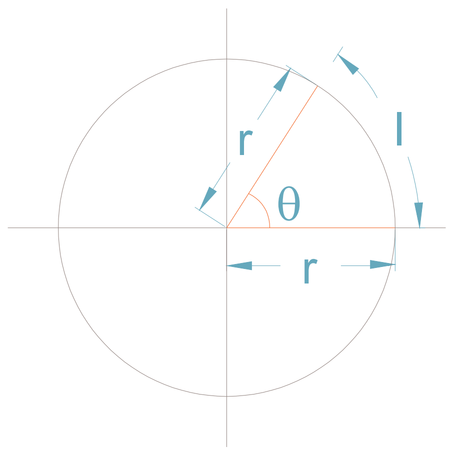
Es objeto de estudio de este programa la derivación correspondiente a las tres primeras de la lista anterior.

4.1 REGLAS PARA DERIVAR LAS FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS

Para derivar las funciones circulares directas (llamadas también funciones trigonométricas) es necesario *recordar* algunos conceptos de trigonometría, tales como:

a) Medida cíclica de un ángulo:

Se le llama así a la relación existente entre la longitud de un arco de circunferencia y el radio que genera a dicho arco.



Medida cíclica del ángulo: $\theta = \frac{l}{r}$

Cuando θ equivale a la unidad se dice que subtiende un RADIAN.

b) Relación entre los sistemas de medición angular cíclico y sexagesimal:

De lo anterior se conoce que:

$1\ rad = \frac{180°}{\pi°}$ y $1° = \frac{\pi°}{180°}\ rad$

Para recordar y aplicar los conceptos anteriores seguiremos el siguiente

EJEMPLO 1.4

Sabemos que: $$1^\circ = \frac{\pi^\circ}{180^\circ}\ rad$$

Es decir: $$1^\circ = 0.01745\ rad$$

Se analiza la siguiente tabla que relaciona el valor de un ángulo θ expresado en grados sexagesimales con el correspondiente valor de la relación trigonométrica Seno Natural de dicho ángulo, cuando el valor de θ disminuye.

El valor angular inicial así como la disminución de dicho valor, en este análisis son arbitrarios, ya que se utilizará esta tabla con fines meramente ilustrativos.

θ (º)	**θ (rad)**	**sen θ**
50	0.87266	0.76604
45	0.78540	0.70711
40	0.69813	0.64279
35	0.61087	0.57358
30	0.52360	0.50000
25	0.43633	0.42262
20	0.34907	0.34202
15	0.26180	0.25882
10	0.17453	0.17365
5	0.08727	0.08715
3	0.05236	0.05234
2	0.03491	0.03491
1.50	0.02618	0.02618
1.25	0.02182	0.02182
1.125	0.01963	0.01963
1	0.01745	0.01745
0.5	0.00873	0.00873

De la tabla anterior es posible apreciar que si el ángulo se hace cada vez más pequeño el valor de su Seno Natural se aproxima cada vez más a su medida cíclica.

Aplicando el concepto de límite a la relación anterior $\frac{sen\ \theta}{\theta}$ cuando **θ** se hace cada vez más pequeño se cumple:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1$$

Lo anterior es un concepto base para la obtención de las reglas de derivación de las funciones circulares directas.

4.1.1. Función sen u.

Sea $y = sen\, u$

Donde $u = f(x)$

Aplicando la regla general de derivación:

$$y + \Delta y = sen(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = sen(u + \Delta u) - sen\, u$$

El segundo miembro de la expresión anterior corresponde con la identidad:

$$sen\, A - sen\, B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)sen\frac{1}{2}(A-B)$$

Haciendo

$$A = u + \Delta u$$

y

$$B = u$$

Resulta:

$$\Delta y = 2\cos\frac{1}{2}(u + \Delta u + u)sen\frac{1}{2}(u + \Delta u - u)$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}sen\frac{1}{2}(\Delta u)$$

$$\Delta y = 2\cos(u + \frac{1}{2}\Delta u)\, sen\frac{1}{2}\Delta u$$

Dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right)sen\frac{1}{2}\Delta u}{\Delta x}$$

Reagrupando

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right)\frac{sen\frac{1}{2}\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right)\frac{sen\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

Afectando el segundo miembro por un quebrado unitario $\frac{\Delta u}{\Delta u}$ y reagrupando:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right)\frac{sen\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

El factor $\frac{sen\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$ corresponde con la forma $\frac{sen\,\theta}{\theta}$ cuyo límite a medida que Δu tiende a cero es, de acuerdo a lo visto en el ejemplo 1.4, la unidad.

De igual forma el límite de $\cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right)$ al variar Δu hacia cero tiende a *cos u.*
Debido a lo anterior resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos u\ (1) * \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Por consiguiente el límite es la derivada:

$$\frac{dy}{dx} sen\, u = \cos u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 2.4

Derivar $y = sen\,5x$

Sea u = 5x

por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \cos 5x \frac{d}{dx}(5x)$

$$\frac{dy}{dx} = 5\cos 5x$$

Ejemplo 3.4

Derivar $y = sen\, ax^2$

Sea u = ax^2

por lo tanto $\frac{dy}{dx} = \cos ax^2 \frac{d}{dx}(ax^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos ax^2\,(2ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax\cos ax^2$$

4.1.2. **Función cos u.**

Sea $y = \cos u$

Donde $u = f(x)$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\cos u = sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

y $sen\, u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$

Por lo tanto: $y = sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} sen\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

Calculando $\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$

Resulta: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{d}{dx}u = 0 - \frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}$

Sustituyendo lo anterior, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(-\frac{du}{dx}\right)$$

Haciendo uso de la identidad $sen\, u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ y trabajando los signos:

$$\frac{dy}{dx} = -sen\, u \frac{du}{dx}$$

Como y = cos u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\cos u = -sen\, u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 4.4

Derivar $y = \cos bx^3$

Sea u = bx^3

por lo tanto $\frac{dy}{dx} = -\, sen\, bx^3 \, \frac{d}{dx}(bx^3)$

$$\frac{dy}{dx} = -\, sen\, bx^3 \,(3bx^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\, 3bx^2 sen\, bx^3$$

Ejemplo 5.4

Derivar $y = \cos(3x^2 - x)$

Sea u = $3x^2$ - x

por lo tanto $\frac{dy}{dx} = -\, sen\,(3x^2 - x)\frac{d}{dx}(3x^2 - x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\, sen(3x^2 - x)(6x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 6x) sen(3x^2 - x)$$

4.1.3. Resto de las funciones circulares con base en las anteriores

<u>Función tan u</u>

Sea $y = \tan u$

Donde $u = f(x)$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\tan u = \frac{sen\,u}{\cos u}$$

$$sen^2 u + \cos^2 u = 1$$

y $$\sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

Por lo tanto: $$y = \frac{sen\,u}{\cos u}$$

Derivando la expresión anterior usando la fórmula de derivación de cociente de funciones, resulta:

$$y = \frac{\cos u \frac{d}{dx} sen\,u - sen\,u \frac{d}{dx} \cos u}{\cos^2 u}$$

Calculando las derivadas de sen u y cos u:

$$y = \frac{\cos u \, \cos u \frac{du}{dx} - sen\,u(-sen\,u)\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Haciendo operaciones y factorizando:

$$y = \frac{(\cos^2 u + sen^2 u)\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas referidas anteriormente:

$$y = \frac{1}{\cos^2 u} * \frac{du}{dx}$$

$$y = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

Como y = tan u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 6.4

Derivar $y = \tan(2x-3)$

Sea u = 2x - 3

por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2x-3)\frac{d}{dx}(2x-3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(2x-3)(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sec^2(2x-3)$$

Ejemplo 7.4

Derivar $y = \tan x - 7x$

Se trata de una suma de funciones, cuya derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan x - \frac{d}{dx}7x$$

por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \frac{d}{dx}(x) - 7\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - 7$$

Función cot u

Sea $y = \cot u$

Donde $u = f(x)$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\cot u = \frac{\cos u}{sen\, u}$$

$$sen^2 u + \cos^2 u = 1$$

y $$\csc^2 u = \frac{1}{sen^2 u}$$

Por lo tanto: $$y = \frac{\cos u}{sen\, u}$$

Derivando la expresión anterior usando la fórmula de derivación de cociente de funciones, resulta:

$$y = \frac{sen\, u \frac{d}{dx}\cos u - \cos u \frac{d}{dx} sen\, u}{sen^2 u}$$

Calculando las derivadas de sen u y cos u:

$$y = \frac{sen\, u(-sen\, u)\frac{du}{dx} - \cos u \cos u \frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Haciendo operaciones y factorizando:

$$y = \frac{-(sen^2 u + \cos^2 u)\frac{du}{dx}}{sen^2 u}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas referidas anteriormente:

$$y = -\frac{1}{sen^2 u} * \frac{du}{dx}$$

$$y = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

Como y = cot u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 8.4

Derivar $y = 2\cot\frac{x}{3}$

Se trata de una constante por una función, cuya derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\cot\frac{x}{3}$$

por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = 2(-\csc^2\frac{x}{3})\frac{d}{dx}(\frac{x}{3})$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\csc^2\frac{x}{3} * (\frac{1}{3})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\csc^2\frac{x}{3}$$

<u>Función sec u</u>

Sea $y = \sec u$

Donde $u = f(x)$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}$$

$$\sec u = (\cos u)^{-1}$$

y $$\tan u = \frac{sen\, u}{\cos u}$$

Por lo tanto: $y = (\cos u)^{-1}$

Derivando de acuerdo a $\frac{d}{dx}u^n = n u^{n-1}\frac{du}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -1(\cos u)^{-2} \frac{d}{dx} \cos u$$

Efectuando las operaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 \frac{d}{dx} \cos u}{(\cos u)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1(-sen\, u) \frac{du}{dx}}{(\cos u)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, u \frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Descomponiendo el denominador, reagrupando y utilizando las identidades trigonométricas mencionadas previamente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\, u}{\cos u} * \frac{1}{\cos u} * \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan u * \sec u * \frac{du}{dx}$$

Como y = sec u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \sec u = \tan u \ \sec u \ \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 9.4

Derivar $y = \sec 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sec 2x$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \tan 2x * \sec 2x \frac{d}{dx}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan 2x * \sec 2x * (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \tan 2x \ \sec 2x$$

Ejemplo 10.4

Derivar $y = 9\sec\frac{x}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = 9\frac{d}{dx}\sec\frac{x}{4}$$

por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = 9(\tan\frac{x}{4} * \sec\frac{x}{4}\frac{d}{dx}(\frac{x}{4}))$$

$$\frac{dy}{dx} = 9(\tan\frac{x}{4} * \sec\frac{x}{4} * (\frac{1}{4}))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}\tan\frac{x}{4}\ \sec\frac{x}{4}$$

<u>Función csc u</u>

Sea $y = \csc u$

Donde $u = f(x)$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\csc u = \frac{1}{sen\, u}$$

$$\csc u = (sen\, u)^{-1}$$

y $$\cot u = \frac{\cos u}{sen\, u}$$

Por lo tanto: $y = (sen\, u)^{-1}$

Derivando de acuerdo a $\frac{d}{dx}u^n = n u^{n-1}\frac{du}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -1(sen\, u)^{-2}\frac{d}{dx}sen\, u$$

Efectuando las operaciones:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1\frac{d}{dx}sen\,u}{(sen\,u)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1(\cos u)\frac{du}{dx}}{(sen\,u)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos u\frac{du}{dx}}{sen^2\,u}$$

Descomponiendo el denominador, reagrupando y utilizando las identidades trigonométricas mencionadas previamente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos u}{sen\,u}*\frac{1}{sen\,u}*\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\cot u*\csc u*\frac{du}{dx}$$

Como y = csc u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\csc u=-\cot u\,\csc u\,\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 11.4

Derivar $y=b\csc 2x^3$

$$\frac{dy}{dx}=b\frac{d}{dx}\csc 2x^3$$

por lo tanto $$\frac{dy}{dx}=b(-\cot 2x^3*\csc 2x^3\frac{d}{dx}(2x^3))$$

$$\frac{dy}{dx}=b(-\cot 2x^3*\csc 2x^3(6x^2))$$

$$\frac{dy}{dx}=-6bx^2\cot 2x^3\csc 2x^3$$

Ejemplo 12.4

Derivar $y = \operatorname{sen}^3 x$

En este caso es necesario indicar que la forma de derivación no corresponde con $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u$, puesto que el seno en este caso está elevado al cubo, y por tanto la forma de derivación correspondiente es:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Por lo que para u = sen x, la derivada será:

$$\frac{d}{dx}sen^3 x = 3sen^{3-1}x \ \frac{d}{dx}senx$$

$$\frac{d}{dx}sen^3 x = 3sen^2 x \ (\cos x)$$

Ejemplo 13.4

Derivar $y = tan\, x \cos x$

Este es un caso de derivación del producto de funciones según la forma:

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Y derivando resulta:

$$\frac{d}{dx}tan\, x\cos x = tan\, x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}tan\, x$$

Se sabe que: $$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

y $$\frac{d}{dx}tan\, x = \sec^2 x$$

por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}tan\, x\cos x = tan\, x(-\operatorname{sen} x) + \cos x(\sec^2 x)$$

Simplificando se tiene:

$$\frac{d}{dx} tan\, x \cos x = -\, tan\, x \operatorname{sen} x + \cos x \sec^2 x$$

Aplicando las identidades correspondientes, el resultado final es:

$$\frac{d}{dx} \tan x \cos x = \cos x$$

Se deja al alumno comprobar el resultado efectuando las sustituciones y el desarrollo adecuado.

Ejemplo 14.4

Derivar $y = \sqrt[3]{\cos 3x}$

Se procede a escribir la función con exponente fraccionario:

$$y = \sqrt[3]{\cos 3x} = (\cos 3x)^{\frac{1}{3}}$$

Sea u = cos 3x derivando como u^n

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\cos 3x)^{-\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} \cos 3x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\cos 3x)^{-\frac{2}{3}}(3 \operatorname{sen} 3x)$$

Simplificando y reordenando resulta:

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = \frac{(\operatorname{sen} 3x)}{(\cos 3x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt[3]{(\cos 3x)^2}}$$

EJERCICIOS 4.1

Derivar

1) $y = 8 \cos x$

2) $y=\frac{1}{2}sen^2 x$
3) $y=\cos^2 x^4$
4) $y=sen(\cos x)$
5) $y=\frac{\cot x}{x+2}$
6) $y=\tan^2 x\sec^3 x$
7) $y=2sen^3 5x^4$
8) $y=sen\ mx * sen^m x$
9) $\rho=a\csc b\theta$
10) $s=\sqrt{\cos 2t}$
11) $y=\frac{4}{\sqrt{\sec x}}$
12) $y=x\cos x$
13) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sen\,2x$
14) $y=\sec^2 x-\tan^2 x$
15) $y=\frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{3}sen^5 x+\frac{5}{12}sen^3 x+\frac{5}{8}sen\,x\right)-\frac{5}{16}x$

4.2 Funciones circulares inversas

Una función circular inversa es aquella en la cual la variable dependiente es el valor angular de una relación trigonométrica y la independiente es dicha relación. La notación utilizada es:

$$y=arc\,sen\,x$$

Misma que se lee como:

"y es igual a arco seno de x"

Y su interpretación es:

"*y es el ángulo cuyo seno es x"*

Y es la función INVERSA de $x=sen\,y$

De manera análoga existen funciones circulares inversas para cada función circular directa, es el caso de:

$sen\,x \Leftrightarrow arc\,sen\,x$
$\cos x \Leftrightarrow arc\cos x$
$\tan x \Leftrightarrow arc\tan x$
$\cot x \Leftrightarrow arc\cot x$
$\sec x \Leftrightarrow arc\sec x$
$\csc x \Leftrightarrow arc\csc x$

Existe una notación alternativa comúnmente utilizada en el lenguaje informático (en los teclados de calculadoras o en programas computacionales), que es:

$$y = sen^{-1}\, x$$

Misma que se lee como:

"y es el seno inverso de x"

Y su interpretación es indistinta a $y = arc\,sen\,x$ *"y es el ángulo cuyo seno es x".*

Es importante mencionar que su uso no es del todo recomendable ya que genera comúnmente errores al confundirse con $sen^{-1}\, x = \dfrac{1}{sen\,x} = \csc x$

Es responsabilidad de quien la utiliza el hacer la aclaración pertinente respecto de cual es su uso en un problema en particular.

<u>Función arc sen u</u>

Sí $\qquad y = arc\,sen\,u$

entonces $\qquad u = sen\,y$

derivando respecto a y, según $\dfrac{d}{dx} sen\,u = \cos u \dfrac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = \cos y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$

Por lo tanto:

$$\cos^2 A = 1 - sen^2 A$$

$$\cos A = \sqrt{1 - sen^2 A}$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} \frac{du}{dx}$$

Pero $u = sen\, y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}$$

Como y = arc sen u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} arc\, sen\, u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 15.4

Derivar $y = arc\, sen\, 5x^2$

Sea u = $5x^2$

$$\frac{d}{dx} arc\, sen\, 5x^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(5x^2\right)^2}} \frac{d}{dx}\left(5x^2\right)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc\, sen\, 5x^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - 25x^4}}(10x)$$

$$\frac{d}{dx} arc\, sen\, 5x^2 = \frac{10x}{\sqrt{1 - 25x^4}}$$

Función arc cos u

Sí $y = arc\cos u$

entonces $u = \cos y$

derivando respecto a y, según $\frac{d}{dx}\cos u = -sen\,u\,\frac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = -\,sen\,y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{sen\,y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sen\,y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$sen^2 A + \cos^2 A = 1$$

Por lo tanto:

$$sen^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$sen\,A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}\frac{du}{dx}$$

Pero $u = \cos y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\frac{du}{dx}$$

Como y = arc cos u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} arc\cos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 16.4

Derivar $y = arc\cos\frac{x}{4}$

Sea $u = \frac{x}{4}$

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}}$$

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{16-x^2}{16}}}$$

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{\frac{4}{4}\sqrt{16-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} arc\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

<u>Función arc tan u</u>

Sí $y = arc\tan u$

entonces $u = \tan y$

derivando respecto a y, según $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = \sec^2 y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}\frac{du}{dx}$$

Pero $u = \tan y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Como y = arc tan u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}arc\tan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 17.4

Derivar $y = arc\tan 3x^2$

Sea u = $3x^2$

$$\frac{d}{dx} arc\tan 3x^2 = \frac{1}{1+\left(3x^2\right)^2}\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc\tan 3x^2 = \frac{1}{1+9x^4}(6x)$$

$$\frac{d}{dx} arc\tan 3x^2 = \frac{6x}{1+9x^4}$$

<u>Función arc cot u</u>

Sí $\qquad y = arc\cot u$

entonces $\qquad u = \cot y$

derivando respecto a y, según $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = -\csc^2 y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\csc^2 y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc^2 y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\cot^2 y}\frac{du}{dx}$$

Pero $u = \tan y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Como y = arc cot u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} arc \cot u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 18.4

Derivar $y = arc \cot \frac{3x}{5}$

Sea $u = \frac{3x}{5}$

$$\frac{d}{dx} arc \cot \frac{3x}{5} = -\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{5}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{5}\right)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc \cot \frac{3x}{5} = -\frac{1}{1+\frac{9x^2}{25}}\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{d}{dx} arc \tan \frac{3x}{5} = -\frac{3}{5\left(1+\frac{9x^2}{25}\right)}$$

$$\frac{d}{dx} arc \tan \frac{3x}{5} = -\frac{3}{\left(5+\frac{9x^2}{5}\right)}$$

$$\frac{d}{dx} arc \tan \frac{3x}{5} = -\frac{3}{\left(\frac{25+9x^2}{5}\right)}$$

$$\frac{d}{dx} arc \tan \frac{3x}{5} = -\frac{15}{9x^2+25}$$

Función arc sec u

Sí $y = arc \sec u$

entonces $u = \sec y$

derivando respecto a y, según $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = \sec y \tan y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}}\frac{du}{dx}$$

Pero $u = \sec y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$$

Como y = arc sec u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} arc\sec u = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 19.4

Derivar $y = arc\sec(6x + 4)$

Sea $u = 6x + 4$

$$\frac{d}{dx} arc\sec(6x+4) = \frac{1}{(6x+4)\sqrt{(6x+4)^2 - 1}} \frac{d}{dx}(6x+4)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc\sec(6x+4) = \frac{1}{(6x+4)\sqrt{(36x^2+48x+16)-1}}(6)$$

$$\frac{d}{dx} arc\sec(6x+4) = \frac{6}{(6x+4)\sqrt{36x^2+48x+15}}$$

<u>Función arc csc u</u>

Sí $\qquad y = arc\csc u$

entonces $\qquad u = \csc y$

derivando respecto a y, según $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$ resulta:

$$\frac{du}{dy} = -\csc y \cot y$$

calculando la derivada de la función inversa

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{\csc y \cot y}$$

Aplicando la regla de la cadena a la expresión anterior puesto que $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc y \cot y}\frac{du}{dx}$$

De las identidades trigonométricas se conoce que:

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\cot A = \sqrt{\csc^2 A - 1}$$

Aplicando esta identidad resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc y\sqrt{\csc^2 y - 1}}\frac{du}{dx}$$

Pero $u = \csc y$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$$

Como y = arc csc u, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} arc \csc u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 20.4

Derivar $y = arc \csc 8x$

Sea $u = 8x$

$$\frac{d}{dx} arc \csc 8x = -\frac{1}{8x\sqrt{(8x)^2 - 1}}\frac{d}{dx}(8x)$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} arc \csc 8x = -\frac{1}{8x\sqrt{64x^2 - 1}}(8)$$

$$\frac{d}{dx} arc \csc 8x = -\frac{8}{8x\sqrt{64x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} arc \csc 8x = -\frac{1}{x\sqrt{64x^2 - 1}}$$

EJERCICIOS 4.2

Derivar

16) $y = arc \cot \frac{3x}{1 - x}$

17) $y = arc \sec \sqrt{x^2 + 3}$

18) $y = arc \tan\left(6x^2 - 3\right)$

19) $y = arc \csc(x^2 - 1)$

20) $y = \left(arc\ sen\, 4x\right)^2$

21) $y = \left(x^2 + 5 arc \tan \frac{x}{2}\right)^3$

22) $y = \dfrac{arc\,sen\,3x}{arc\cos 3x}$

23) $y = 2\sqrt{x}\ arc\cot\sqrt{x}$

24) $y = arc\cos\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$

25) $y = \dfrac{1}{2} arc\csc\dfrac{3}{4x-1}$

26) $y = arc\tan\dfrac{x-a}{x+a}$

27) $y = arc\csc(\sec x)$

28) $y = arc\cot\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

29) $y = arc\sec\dfrac{x+1}{x-1} + arc\,sen\dfrac{x-1}{x+1}$

30) $y = a\,arc\,sen\ \dfrac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$

4.3 Propiedades de los logaritmos.

Para hablar de las propiedades de los logaritmos, es necesario recordar que el logaritmo de un número *x* es el exponente *n* al cual es necesario elevar la base *a* para obtener el número *x*.

Es decir, sí $x = a^n$

Entonces, y de acuerdo a lo acabado de definir, el logaritmo de **x** para la base **a** es **n,** y se representa por:

$$\log_a x = n$$

que se lee “el logaritmo de **x** en la base **a** es igual a **n**”

ó simplemente “logaritmo de **x** base **a** es **n**”.

Ejemplo 21.4

$\log_4 16 = 2$, debido a que $16 = 4^2$

Ejemplo 22.4

$\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$, ya que $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

La notación anterior es aplicable a cualquier base, pero existe una notación particular para la base **10** y para la base **e**:

La notación para base 10 corresponde a los llamados logaritmos decimales, comunes o vulgares y se representa sin indicar explícitamente la base:

$\log x$ Logaritmo base 10.

Ejemplo 23.4

$\log 10000 = 4$, porque $10^4 = 10000$

Mientras que para los logaritmos naturales o neperianos cuya base es **e**, se utiliza:

$\ln x$ Logaritmo base **e.**

Ejemplo 24.4

$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, debido a que $e^{1/2} = \sqrt{e}$

En cualquier caso de los anteriores se presentan las siguientes propiedades:

1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

2) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia del logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

3) El logaritmo de un número potenciado es igual al exponente del número por el logaritmo de éste.

$$\log_a A^n = n \log_a A$$

4) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando entre el índice de la raíz.

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$$

Es importante resaltar que, independientemente de la base:

i) El logaritmo de la unidad es cero

$$\log_a 1 = 0$$

ii) El logaritmo de la base es la unidad.

$$\log_a a = 1$$

4.3.1 El número *e* como limite y logaritmos naturales.

Para el estudio de las fórmulas de derivación logarítmica es necesario determinar el límite hacia cual tiende la expresión

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

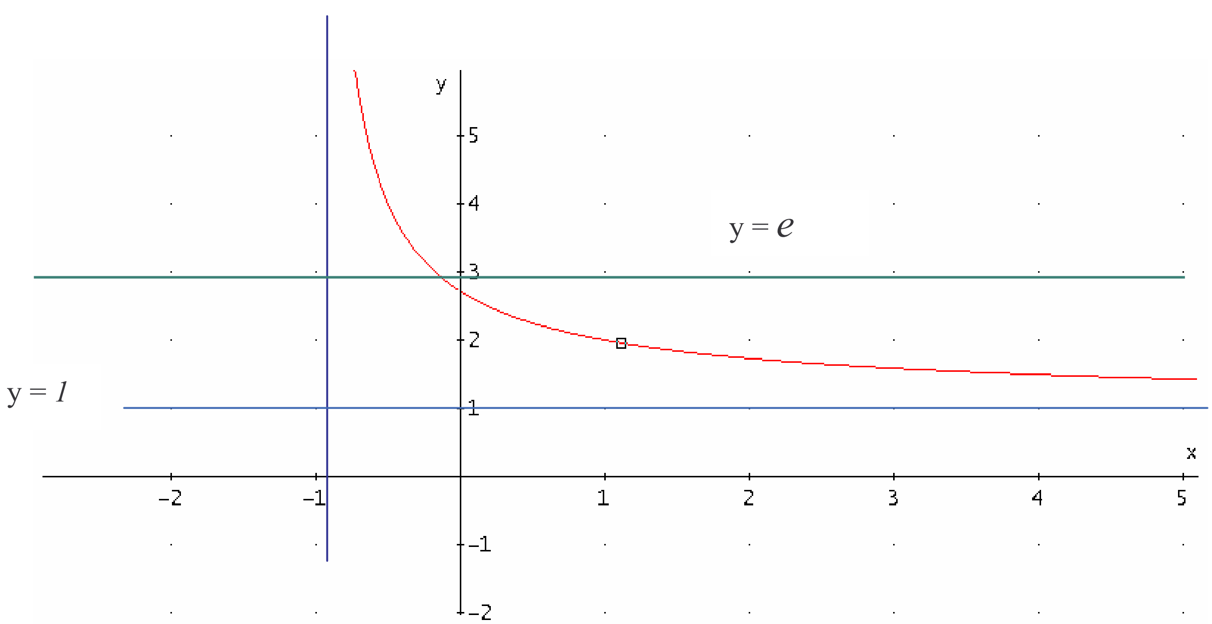
cuando x tiende a cero, es decir

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

La demostración formal de dicho límite no es objeto del presente curso, por lo cual se determinará de manera intuitiva analizando el siguiente

Ejemplo 25.4

Se traza la gráfica de la función $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, y resulta:



La tabulación que da origen a la gráfica anterior es, considerando incrementos arbitrariamente seleccionados que se acercan a cero por la derecha:

x	y
1000000	1.00001
100000	1.00012
10000	1.00092
1000	1.00693
100	1.04723
10	1.27098
9	1.29155
8	1.31607
7	1.34590
6	1.38309
5	1.43097
4	1.49535
3	1.58740
2	1.73205
1	2.00000
0.5	2.25000
0.25	2.44141
0.125	2.56578
0.05	2.65330
0.025	2.65506
0.0125	2.70148
0.005	2.71152
0.003	2.71422
0.001	2.71692
0.0001	2.71815
0.00001	2.71827
0.000001	2.71828

Mientras que por la izquierda es:

x	y
-0.000001	2.71828
-0.00001	2.71830
-0.0001	2.71842
-0.001	2.71964
-0.003	2.72237
-0.005	2.72511
-0.0125	2.73547
-0.025	2.75306
-0.05	2.78951
-0.125	2.91029
-0.25	3.16049
-0.5	4

-1	∞

De lo cual es posible concluir que la función $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ tiene por límites a:

∞	Cuando $x \to -1$ por la izquierda
1	Cuando $x \to \infty$ por la derecha
2.71828	Cuando $x \to 0$ por la izquierda
2.71828	Cuando $x \to 0$ por la derecha

Como se había indicado, la intención es ubicar la tendencia de y cuando x se acerca a cero, y ésta es 2.71828, formalizando lo anterior resulta:

|

$$\lim_{x \to 0} y = (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828$$

Este límite partícula se representa por **e,** es llamado número Neperiano y es la base de los logaritmos Naturales, Neperianos o Hiperbólicos.

4.4 Derivada de funciones logarítmicas

Función $\log_a u$

Sea $\qquad y = \log_a u$

y $\qquad u = f(x)$

Aplicando la regla general de derivación:

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u$$

Por tratarse de una diferencia de logaritmos de la misma base, de acuerdo a la propiedad $\qquad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$, resulta:

Haciendo $\qquad A = u + \Delta u$

y $\qquad B = u$

resulta: $\qquad \Delta y = \log_a \left(\frac{u + \Delta u}{u} \right)$

haciendo operaciones:

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

dividiendo por Δu

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

Afectando el segundo miembro por el factor unitario $\frac{u}{u}$ y reagrupando:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{u}{\Delta u}\right)$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos $\log_a A^n = n \log_a A$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \left(\frac{1}{u}\right) \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\left(\frac{u}{\Delta u}\right)}$$

Ahora se estima el límite para Δu acercándose a cero y es:

$$\frac{dy}{du} = \left(\frac{1}{u}\right) \lim_{\Delta u \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\left(\frac{u}{\Delta u}\right)}$$

$$\frac{dy}{du} = \left(\frac{1}{u}\right) \log_a \left\{ \lim_{\Delta u \to 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\left(\frac{u}{\Delta u}\right)} \right\}$$

el límite a evaluar en la expresión anterior corresponde con

$$\lim_{x \to 0} y = (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2.71828$$

por lo cual $\quad \frac{dy}{du} = \left(\frac{1}{u}\right) \log_a e$

Al ser tanto **y** como **u** funciones de **x,** aplicando la regla de la cadena resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{u}\right) \log_a e \frac{du}{dx}$$

Y como y = $\log_a$ u, entonces:

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \left(\frac{1}{u}\right) \log_a e \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 26.4

Derivar $y = \log_a \frac{3}{x}$

Reordenando

$$y = \log_a 3x^{-1}$$

Sea $$u = 3x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{-1}} \log_a e \frac{d}{dx}\left(3x^{-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}\log_a e\left(-3x^{-2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x}{3x^2}\log_a e$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\log_a e}{x}$$

Función $\log_e$ u

Sea $$y = \log_e u$$

De acuerdo a la notación particular de logaritmos base e, esto se puede escribir:

$$y = \ln u$$

y $$u = f(x)$$

Aplicando la regla de derivación logarítmica

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \left(\frac{1}{u}\right)\ \log_a e\ \frac{du}{dx}$$

Haciendo a = **e**

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \left(\frac{1}{u}\right)\ \log_e e\ \frac{du}{dx}$$

En el segundo miembro se encuentra la forma **log$_e$ e**, la cual por tratarse del logaritmo de la base según:

$$\log_a a = 1\ ,$$

resulta:

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \left(\frac{1}{u}\right)(1)\ \frac{du}{dx}$$

Y como y = $\log_e$ u = ln u

entonces:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dx}$$

o bien reagrupando:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Ejemplo 27.4

Derivar $y = \ln(5x+2)$

Sea $u = 5x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(5x+2)}{5x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{5x+2}$$

Ejemplo 28.4

Derivar $y = \ln(\ln x)$

Sea $u = \ln x$

En este caso la función delimitada u, corresponde con la forma a derivar, por lo cual es necesario “derivar dos veces” como se muestra en el numerador de la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\frac{d}{dx}x}{x}}{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\ln x}$$

Ejemplo 29.4

Sea $y = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

Si aplicamos la fórmula para derivar directamente se puede observar que el procedimiento sería muy laborioso, por lo cual es conveniente aplicar, antes de derivar, las propiedades de los logaritmos:

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$y = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\right]$. Realizadas las operaciones anteriores, se puede derivar directamente aplicando la formula correspondiente.

$$\frac{d}{dx}y = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right]$$. Simplificando la expresión anterior:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x}{x^4-1}$$

4.5 **Función exponencial y su derivada.**

Se considera una función como exponencial cuando la variable aparece en el exponente.

$$y = a^u$$

Donde $u = f(x)$

La derivada de una función exponencial se obtiene mediante la fórmula siguiente:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} .$$

En este caso, no se efectuó la deducción correspondiente, debido a que para su realización se requiere de conocimientos que se verán en la siguiente unidad.

Ejemplo 29.4

Derivar $y = 10^{\left(x^2+5x-6\right)}$

Sea $u = x^2 + 5x - 6$

$$\frac{d}{dx}10^{\left(x^2+5x-6\right)} = 10^{\left(x^2+5x-6\right)} \ln 10 \frac{d}{dx}\left(x^2+5x-6\right)$$

$$\frac{d}{dx}10^{\left(x^2+5x-6\right)} = 10^{\left(x^2+5x-6\right)} \ln 10 \left(2x+5\right)$$

$$\frac{d}{dx}10^{\left(x^2+5x-6\right)} = (2x+5)10^{\left(x^2+5x-6\right)}\ln 10$$

Función e^u

Un caso particular de la derivada $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ existe cuando la base es el número neperiano, y su derivada es:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \ln e \frac{du}{dx}$$

Sin embargo, si se recuerda que en cualquier sistema logarítmico el logaritmo de la base es la unidad, entonces resulta:

$$\ln e = 1$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u (1) \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 30.4

Derivar $y = e^{\left(x^3+1\right)}$

Sea $u = x^3 + 1$

$$\frac{d}{dx}e^{\left(x^3+1\right)} = e^{\left(x^3+1\right)} \frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)$$

$$\frac{d}{dx}e^{\left(x^3+1\right)} = e^{\left(x^3+1\right)}\left(3x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}e^{\left(x^3+1\right)} = \left(3x^2\right)e^{\left(x^3+1\right)}$$

Ejemplo 31.4

Derivar $y = e^{arc\,\text{sen}\,x^2}$

Sea $u = arc\,\text{sen}\,x^2$

$$\frac{d}{dx} e^{\left(arc\,\text{sen}\,x^2\right)} = e^{\left(arc\,\text{sen}\,x^2\right)} \frac{d}{dx}\left(arc\,\text{sen}\,x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx} e^{\left(arc\,\text{sen}\,x^2\right)} = e^{\left(arc\,\text{sen}\,x^2\right)} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Ejercicio 4.33

Derivar

31) $y = \ln(x+5)$
32) $y = \ln(\cos 4x)$
33) $y = x^3 \ln x$
34) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
35) $y = 6\ln(4x-3)$
36) $y = \ln(tan\,x)$
37) $y = e^{x+9}$
38) $y = e^{\sec 2x}$
39) $y = e^{arc\,\text{sen}\,x^2}$
40) $y = e^{\csc 7x}$
41) $y = e^{x}\left(x^3 - 1\right)$
42) $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 7}$
43) $y = \dfrac{e^{3x} + e^{-3x}}{e^{3x} - e^{-3x}}$
44) $y = \left(e^{3x} + 2x\right)^2$
45) $y = \sqrt[3]{e^{3x} + 4}$

4.6 Derivada de funciones algebraicas y circulares aplicando las propiedades de los logaritmos.

Nota: se considera necesario cambiar este tema para incluirlo en la siguiente unidad, ya que requiere de los conocimientos que se estudiaran en la misma.