UNIDAD III: Derivadas de funciones algebraicas

Objetivos particulares

Al término de la unidad el alumno obtendrá, a partir de la regla general para la derivación, las reglas particulares de las diversas funciones algebraicas.

3.1 Reglas para la derivación de funciones algebraicas

A partir del método o regla general, visto en la unidad anterior, es posible determinar las fórmulas necesarias para calcular las derivadas de las funciones algebraicas.

Para simplificar las operaciones, tomaremos como punto de partida la expresión de la derivada como el límite del cociente entre los incrementos de x e y:

Haciendo $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{d}{dx}y = y' = f'(x) = f_x = D_x y$ se tiene:

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{.......(i)}$$

A continuación, aplicaremos esta expresión para obtener las fórmulas básicas utilizadas en el cálculo de las derivadas de funciones algebraicas.

3.1.1 Función Constante:

Sea $y = f(x) = C$, C = constante, entonces $y = C$ para cualquier valor de x:
En la fórmula (i):, se sustituye $f(x+\Delta x) = C$ y $f(x) = C$

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x},$$

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

De este desarrollo obtenemos la primera fórmula para derivar funciones algebraicas:

(1) $\frac{d}{dx}C = 0$; $C = constante$.

Con palabras, podemos decir que la derivada de una constante, con respecto a una variable independiente x es igual a cero.

Ejemplo 1.3

Si y = f(x) = 4, $\frac{d}{dx}y = f'(x) = \frac{d}{dx}4 = 0$.

Ejemplo 2.3

Si y = π , $y' = \frac{d}{dx}\pi = 0$.

3.1.2.1 Función Identidad

Sea $y = f(x) = x$, de tal forma que $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$, y sustituyendo en (i)

$$\frac{d}{dx}y = \underset{\Delta x \to 0}{Lim}\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lim}\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

De donde, la segunda fórmula para este tipo de funciones es:

(2) $\frac{d}{dx}x = 1$

Dicho en lenguaje común, la derivada del argumento, respecto a sí mismo, es igual uno. Esto es:

$\frac{d}{dt}t = 1$, $\frac{d}{dy}y = 1$, $\frac{d}{ds}s = 1$, etc.

3.1.2.2 Constante por función.

Si una constante “C” multiplica a una función: $y = Cf(x)$ y $y + \Delta y = Cf(x + \Delta x)$, entonces:

$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x}$ y factorizando por factor común:
$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C[f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} C\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ y por los teoremas sobre límites, una constante puede multiplicar al limite sin que altere el resultado, de tal forma que:

$\frac{d}{dx}y = C\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$, pero

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, por lo que:

(3) $\frac{d}{dx}Cf(x) = C\frac{d}{dx}f(x) = Cf'(x)$

Se dice entonces que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Ejemplo 3.3

Si $y = Cx$,
$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}Cx = C\frac{d}{dx}x$, pero, por la fórmula (2) $\frac{d}{dx}x = 1$, entonces:

(4) $\frac{d}{dx}Cx = C$

Esto es, en particular, la derivada de una constante por x es igual a la constante.

Ejemplo 4.3

Si $y = 9x$,
$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}9x = 9$

3.1.3 Suma de funciones.

Sean u, v y w tres funciones de x, y sea y la suma de estas funciones, esto es:
$y = u \pm v \pm w$, dado que al derivar y se tendría que calcular el límite de cada expresión y por los teoremas sobre límites el límite de una suma es igual a la suma de los límites, se tiene la siguiente fórmula:

(5) $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v \pm \frac{d}{dx}w$

Esto es, la derivada de la suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.

Ejemplo 5.3

Si $y = 5x + 7$,

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}5x + \frac{d}{dx}7$
$= 5 + 0 = 5$.

1.4 Función Potencia.

Sea $y = f(x) = x^n$, entonces $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$. Sustituyendo:

$\frac{d}{dx}y = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$\frac{d}{dx}y = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n-1}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$ simplificando:

$\frac{d}{dx}y = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n-1}{2}x^{n-2}(\Delta x) + ... + (\Delta x)^n}{\Delta x}$. Obteniendo el factor común Δx:

$\frac{d}{dx}y = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{(\Delta x)(nx^{n-1} + \frac{n-1}{2}x^{n-2}(\Delta x) + ... + (\Delta x)^{n-1}}{\Delta x}$.

Simplificando (Δx) y calculando el límite, todos los términos que contienen Δx tienden a 0, de tal forma que la sexta fórmula para el cálculo de derivadas algebraicas es:

(6) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Con palabras diremos que la derivada de la potencia de una variable, respecto de sí misma, es igual al exponente por la base elevada al exponente disminuida en una unidad.

Ejemplo 6.3

Si y = x^2

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^2 = 2x^{2-1} = 2x.$$

Ejemplo 7.3

Si y = x^5

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^5 = 5x^{5-1} = 5x^4$$

Ejemplo 8.3

Si y = x^{-3}

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^{-3} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

Ejemplo 9.3

Si y = $x^{\frac{5}{4}}$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}x^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$$

Ejemplo 10.3

Si, $y = Cx^n$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}Cx^n = C\frac{d}{dx}x^n$, por la fórmula (3). Ahora bien, de acuerdo con la fórmula (6) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, por lo tanto:

(7) $\frac{d}{dx}Cx^n = nCx^{n-1}$, $C =$constante.

Ejemplo 11.3

Si $y = 5x^8$, $\frac{d}{dx}y = 8(5)x^{8-1} = 40x^7$

Las fórmulas correspondientes al cálculo de la derivada de producto y división de funciones se obtienen de manera un poco diferente a las anteriores:

3.1.5 Producto de funciones.

Se definen dos funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$; y una función $F(x) = f(x) * g(x)$, de tal forma que $f(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) * g(x+\Delta x)$. Sustituyendo en (i):

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) * g(x+\Delta x) - f(x) * g(x)}{\Delta x}$$

. Si en esta última expresión restamos y sumamos el mismo término, la expresión no se altera, así:

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) * g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) * g(x) + f(x+\Delta x) * g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Agrupando y factorizando:

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}.$$

Separando términos y aplicando el teorema de límites sobre la suma de funciones:

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x+\Delta x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0}\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$$

A continuación, se aplicará nuevamente los teoremas sobre límites, ahora referentes al producto de funciones y para lo cual debemos considerar lo siguiente:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$. Esto es:

$\frac{d}{dx} y = f(x)\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + g(x)\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]$. Pero los límites dentro de los corchetes representan las derivadas de u y v, respectivamente, por lo que, la fórmula para la derivada del producto de dos funciones, es:

(8) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$

En lenguaje cotidiano decimos que la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo 12.3

Si $y = (3x+6)(x^2 - 8)$ y decimos que $u = 3x+6$ y $v = x^2 - 8$, sus respectivas derivadas son entonces: $\frac{d}{dx}u = 3$ y $\frac{d}{dx}v = 2x$. Sustituyendo en (8):

$\frac{d}{dx} y = (3x+6)(2x) + (x^2 - 8)(3)$, efectuando operaciones:

$\frac{d}{dx} y = 6x^2 + 12x + 3x^2 - 24$ y simplificando:

$\frac{d}{dx} y = 9x^2 + 12x - 24$.

3.1.6 Cociente de funciones.

Si ahora $F(x) = \frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces $F(x+\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}$, y sustituyendo en (i):

$\frac{d}{dx} y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x}$, aplicando el principio fundamental:

$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}$. Si ahora se resta y se suma $g(x)f(x)$ en el numerador:

$$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - g(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Reordenando los dos últimos términos, agrupando y obteniendo factores comunes:

$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)] - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x g((x+\Delta x)g(x)}$; aplicando el principio fundamental, pero a la inversa y separando términos en el numerador:

$\frac{d}{dx}y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x+\Delta x)g(x)}$. A continuación se usaran los teoremas sobre límites relacionados con el cociente, el producto y la suma (diferencia) de funciones, considerando lo siguiente:

$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$ y $\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$; sustituyendo:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{g(x)\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] - f(x)\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x)g(x)}$$

Además, los límites de las expresiones dentro de los corchetes corresponden a las derivadas de u y v, respectivamente, por lo que la fórmula final es:

(9) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$.

Esta fórmula, con palabras se expresa de la siguiente manera: la derivada de un cociente de funciones es igual a la de abajo, por la derivada de la de arriba, menos la de arriba por la derivada de la de abajo, entre la de abajo al cuadrado.

Ejemplo 13.3

Si $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-5}$ y decimos que $u = x^2+4$ y $v = x^2-5$; sus respectivas derivadas son: $\dfrac{d}{dx}u = 2x$ y $\dfrac{d}{dx}v = 2x$. Sustituyendo en la fórmula (9), se tiene:

$y' = \dfrac{(x^2-5)(2x)-(x^2+4)(2x)}{(x^2-5)^2}$. Efectuando operaciones:

$y' = \dfrac{2x^3-10x-2x^3+8x}{(x^2-5)^2}$ y simplificando:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-5)^2}$$

3.1.7 Función de función.

En ocasiones una variable está en función de otra, la cual, a su vez, es función de una tercera. A este tipo de funciones se les conoce como funciones compuestas o función de función

Para calcular la derivada de la primera variable respecto de la tercera, se puede utilizar lo que se conoce como regla de la cadena:

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces:

(10) $\dfrac{d}{dx}y = \dfrac{d}{du}y \cdot \dfrac{d}{dx}u$.

En lenguaje cotidiano decimos que la derivada de y con respecto a x, donde y es función de u y u es función de x, es igual al producto de las derivas de las funciones correspondientes.

Ejemplo 14.3

Si $y = \sqrt{u}$, y $u = x^3+2$, derivando por separado las funciones anteriores, haciendo la consideración de que $\sqrt{u} = u^{1/2}$:

$\dfrac{d}{du}y = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}u = 3x^2$, sustituyendo en (10):

$\frac{d}{dx}y = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(3x^2)$, pero, podemos sustituir el correspondiente valor de u, de tal forma que el resultado es:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}.$$

Este resultado se puede comprobar fácilmente si primero se sustituye en la función original el valor de u y posteriormente se realiza el cálculo de la derivada.

Ejemplo 15.3

Si $y = u^n$, donde $u = f(x)$, aplicando la regla de la cadena (10), tenemos:

$\frac{d}{du}y = nu^{n-1}$ y por lo tanto:

(11) $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}u$

Esto es, la derivada de la potencia de una función de x es igual al exponente por la función elevada al exponente disminuido en una unidad, por la derivada de la función con respecto a x.

Ejemplo 16.3

Si $y = (5x^2 + 8)^4$.

Decimos que $u = 5x^2 + 8$ y $n = 4$, además $\frac{d}{dx}u = 10x$, y sustituyendo en (11):

$$\frac{d}{dx}y = 4(5x^2 + 8)^{4-1}(10x)$$

$$\frac{d}{dx}y = 40x(5x^2 + 8)^3$$

3.1.8 Función inversa

Se dice que la inversa de una función f, denotada por f^{-1}, es aquella en la que la variable dependiente se vuelve independiente y la independiente se hace dependiente; en otras palabras, su dominio se transforma en codominio y el codominio pasa a ser el dominio de la función. Esto es:

Si $y = f(x)$ es la función original, entonces $x = f(y)$ será su función inversa.

Por ejemplo, en trigonometría tenemos un teorema que afirma que en un triángulo a mayor valor de un ángulo, mayor será el valor del lado opuesto, en este planteamiento la variable dependiente es el lado. Pero si el teorema se expresa afirmando que a mayor valor de un lado, mayor es el ángulo opuesto, la variable dependiente pasa a ser el ángulo.

Si lo anterior lo expresamos con símbolos, se considera que dos funciones son inversas si en ellas se verifica que:

$$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$$

La derivada de una función inversa está dada por la fórmula:

(12) $\dfrac{d}{dy}x = \dfrac{1}{dy/dx}$.

Con palabras podemos decir que la derivada de la inversa de una función es el recíproco de la derivada de la función.

Ejemplo 17.3

Si $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$, calcular $\dfrac{d}{dx}y$ y $\dfrac{d}{dy}x$.

Sol. Utilizando la fórmula del cociente (9) y diciendo que:
$u = 2x+1$ y $v = x$, por lo tanto $\dfrac{d}{dx}u = 2$ y $\dfrac{d}{dx}v = 1$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}y &= \frac{(x)(2)-(2x+1)(1)}{(x)^2} \\ &= \frac{2x-2x-1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Para $\dfrac{d}{dy}x$ utilizamos la fórmula (12):

$$\frac{d}{dy}x = \frac{1}{-\frac{1}{x^2}}$$, utilizando el principio fundamental del álgebra:

$$= -x^2$$

Ejercicios 3.1

Utilizando la fórmula correspondiente, obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplificar. Observa que en algunos casos será necesario aplicar más de una fórmula para llegar al resultado.

1. $y = 3x^2 - 5x + 6$
2. ejemplo con exponentes fraccionarios.
3. $f(x) = 7x - \sqrt{x}$
4. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$
5. $S(t) = t^5$
6. $z = u^{-8}$
7. $y = w^{\frac{5}{3}}$
8. $w = \dfrac{s+1}{s-1}$
9. $g(x) = (x^3 - x)^6$
10. ejemplo con raíz y potencia
11. $u = \dfrac{v^3 - 2v}{v^2 + v + 1}$
12. $f(x) = \left(\dfrac{2x+5}{3x-2}\right)^5$
13. $v = \dfrac{(s+2)^2}{s+3}$
14. $y = \sqrt{4 - x^2}$
15. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3 + x^2}}$
16. $F(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$
17. otro ejemplo como el anterior. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}}$

18. $y = \dfrac{25}{(x^3 - 2x)^4}$

19. ejemplos que contengan factor común o que representen un polinomio al cubo, por ejemplo.

20. Si $y = (5x + 7)^3$, determinar $\dfrac{d}{dx}y$ y $\dfrac{d}{dy}x$

21. Utilizando la regla de la cadena, encontrar la derivada de las siguientes funciones:

    a. $y = u^2 + 5u - 8$ y $u = \sqrt{x}$

    b.