Unidad II: La derivada de una función.

Objetivos particulares

Al finalizar la unidad el alumno definirá el concepto de incremento y lo asociará al de función. Demostrará que dichos incrementos tienen un límite que es la derivada.

2.1.1 Incrementos y su relación. Notación.

En la matemática se considera el incremento de una variable como el aumento o disminución que experimenta desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$, valores que deben estar comprendidos dentro de su campo de variación. Esto lo podemos simbolizar de la siguiente manera:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

Ejemplo 1.2 Hallar Δx si la variable x cambia de $x_0 = 3$ a $x_1 = 7$

Luego:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta x = 7 - 3$$
$$\Delta x = 4$$

Ejemplo 2.2 Encontrar Δx si $x_0 = 11$ a $x_1 = 5$

Luego:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta x = 5 - 11$$
$$\Delta x = -6$$

En este caso se afirma que se trata de un decremento o incremento negativo.

2.1.2 Relación entre los incrementos de la función y la variable independiente

Por otra parte debemos considerar que en una función $y = f(x)$, si se da un incremento Δx a la variable x, $\Delta x = x_1 - x_0$, entonces la función se vera incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y(x_1) - y(x_0)$, ya que $x_1 = x_0 + \Delta x$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{incremento\ y}{incremento\ x}$, recibe el nombre de cociente de incrementos de la función.

Ejemplo 3.2 dada la función $y = x^2 + 5x - 8$. Calcular Δy y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x varía de

a) $x_0 = 1$ a $x_1 = 1.2$

Sol: si calculamos Δx, se tiene que:

$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta x = 1.2 - 1$$
$$\Delta x = 0.2$$

Por otra parte se tiene que:

$$y(x_0) = y(1) = 1 + 5 - 8 = -2, \qquad y(1) = -2$$
$$y(x_1) = y(1.2) = (1.2)^2 + 5(1.2) - 8$$
$$= 1.44 + 6 - 8$$
$$= -0.56$$

Luego:

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$
$$= -0.56 - (-2)$$
$$= 1.44 \therefore \Delta y = 1.44$$

Y además: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2 \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7.2$$

Si este planteamiento lo hacemos de otra manera diríamos que si para la función:

$$y = x^2 + 5x - 8$$

Incrementamos a las dos variables se obtiene;

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 8$$

Si restamos miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se tiene:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 8 - x^2 - 5x + 8$$

Simplificando y eliminando términos semejantes, nos queda:

$$\Delta y = 2x\Delta x + \overline{\Delta x}^2 + 5\Delta x$$

La cual es una expresión algebraica que representa el valor de incremento de y en lo general. Para nuestro caso se tiene que $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$, sustituyendo:

$$\Delta y = 2(1)(0.2) + (0.2)^2 + 5(0.2)$$
$$\Delta y = 0.4 + 0.04 + 1 \therefore \Delta y = 1.44$$

Si ahora queremos conocer el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dividimos la expresión que representa Δy, entre Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 5$$

Sustituyendo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(1) + 0.2 + 5$$

$$= 2 + 0.2 + 5 \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 7.2$$

Obteniendo los mismos resultados que en el método anterior.

2.1.3 La derivada como límite

Con los comentarios que hemos hecho en el apartado anterior, podemos plantear ya el concepto básico de nuestro curso que es el de la derivada.

Se define la derivada de una función como el resultado de calcular el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando el incremento del denominador Δx tiende a valer cero. Esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{Siempre que el límite exista.}$$

2.2 Regla general para la derivación

Si establecemos un procedimiento general para el cálculo de la derivada de una función, este queda de la siguiente manera.

Primeramente debemos incrementar a las variables de la función:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Enseguida podemos restar miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Podemos ahora dividir ambos miembros de la igualdad entre Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obteniendo el cociente de incrementos, y para finalizar debemos calcular el límite cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obteniendo de esta manera la derivada de la función $y = f(x)$.

Si el método anterior lo aplicamos a casos particulares, podemos ilustrarlo con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.2 Hallar la derivada de la función $y = 2x^3 + 5x^2 - 8x - 3$

Procediendo igual que en el caso anterior se tiene;

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 8(x + \Delta x) - 3$$

Restando miembro a miembro:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3\overline{\Delta x}^2 + \overline{\Delta x}^3) + 5(x^2 + 2x\Delta x + \overline{\Delta x}^2) \\ &= -8x - 8\Delta x - 3 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 3 \end{aligned}$$

Luego: $\Delta y = 6x^2\Delta x + 6x\overline{\Delta x}^2 + 2\overline{\Delta x}^3 + 10x\Delta x + 5\overline{\Delta x}^2 - 8\Delta x$

Dividiendo entre Δx y calculando el $\underset{\Delta x \to 0}{Lim} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\begin{aligned} \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \underset{\Delta x \to 0}{Lim}(6x^2 + 6x\Delta x + 2\overline{\Delta x}^3 + 10x + 5\Delta x - 8) \\ &= 6x^2 + 10x - 8 \\ &\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

Expresión que representa la derivada de la función.

Ejemplo 5.2 Encontrar la derivada de la función $S = \dfrac{t^2}{3t - 1}$

Procediendo igual se tiene que:

$$S + \Delta S = \frac{(t + \Delta t)^2}{3(t + \Delta t) - 1}$$

Restando:

$$\Delta S = \frac{(t + \Delta t)^2}{3(t + \Delta t) - 1} - \frac{t^2}{3t - 1}$$

Simplificando:

$$\Delta S = \frac{(t + \Delta t)^2(3t - 1) - t^2\left[3(t + \Delta t) - 1\right]}{\left[3(t + \Delta t) - 1\right](3t - 1)}$$

$$\Delta S = \frac{3t^3 - t^2 + 6t^2\Delta t - 2t\Delta t + 3t\overline{\Delta t}^2 - \overline{\Delta t}^2 - 3t^3 - 3t^2\Delta t + t^2}{\left[3(t + \Delta t) - 1\right](3t - 1)}$$

$$\Delta S = \frac{3t^2\Delta t - 2t\Delta t + 3t\overline{\Delta t}^2 - \overline{\Delta t}^2}{\left[3(t + \Delta t) - 1\right](3t - 1)}$$

Dividiendo entre Δt y colocando el limite cuando $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 - 2t + 3t\Delta t - \Delta t}{[3(t + \Delta t) - 1](3t - 1)}$$
$$= \frac{3t^2 - 2t}{(3t - 1)^2}$$

La cual representa a la derivada de la función.

Ejercicios 2.1

1) Dada una función $y = x^2 + 5x - 8$, calcular Δy y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando x varía de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0.8$

2) Calcular Δy y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en los casos siguientes:

a) $y = 2x - 3$, y x pasa de 3.3 a 3.5
b) $y = x^2 + 4x$, y x pasa de 0.7 a 0.85
c) $y = \dfrac{2}{x}$, y x pasa de 0.75 a 0.5

3) Si $S = 5t^2$ calcular $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, cuando t varía de:

a) De 3 a 3.5
b) De 3 a 3.2
c) De 3 a 3.1

Calcular la derivada de las siguientes funciones, aplicando el limite del cociente de incrementos:

4) $y = x^3 - 11x^2 - 8x - 6$
5) $y = 7x^2 - 9x - 5$
6) $y = \dfrac{4}{x + 2}$
7) $y = \dfrac{3x}{2x - 5}$
8) $S = \dfrac{1}{t^2}$
9) $S = \dfrac{2t - 1}{2t + 1}$
10) $y = \sqrt{3x - 1}$ Sugerencia: recuerda el desarrollo del límite en este tipo de funciones, en donde es necesario racionalizar.