UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES
CENTRO DE BACHILLERATO Y SECUNDARIA
MATEMATICAS IV. CÁLCULO DIFERENCIAL

Materia clave: 12043	Semestre: Cuarto	Créditos: 6 HT:1 HP:4

Descripción General

Durante el curso el alumno conocerá los conceptos de variable, función y límite, evaluando los dos últimos y los aplicará en las derivadas de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, haciendo énfasis en problemas de límites, de máximos y mínimos.

Objetivo General

Al término del curso el alumno identificará los conceptos de función, límite y derivada, aplicándolos para calcular la derivada de diversas funciones.

Contenido General

Unidad I: Constantes y variables, funciones y sus limites.
Unidad II: La derivada de una función.
Unidad III: Derivación de funciones algebraicas.
Unidad IV: Derivada de funciones trascendentes.
Unidad V: Derivadas implícitas y derivadas sucesivas.
Unidad VI: Aplicaciones de la derivada.

Unidad I: Constantes y variables, funciones y sus límites.

1.1 Constantes y variables.

Tomando en cuenta que el lenguaje que se emplea en la matemática está estructurado basándose en constantes y variables, comenzaremos por recordar estos conceptos:

Constante: es una magnitud que se considera invariable, o también se puede considerar como uno de los diferentes valores que puede tomar una variable.

Para representar a una constante, se emplean normalmente las letras iniciales del alfabeto: a, b, c, d,…. y las podemos clasificar en absolutas y arbitrarias.

Una constante es absoluta cuando nos representa un valor fijo, como puede ser: 3, -14, π, e… y una constante será arbitraria cuando su valor no necesariamente es fijo: $y = mx+b$, $x^2 + y^2 = r^2$; a estas últimas también se les da el nombre de *parámetros*. Para ciertas aplicaciones se les debe simbolizar con letras mayúsculas: A, B, C,…

Variable: una magnitud variable es cualquier símbolo utilizado para designar una posición vacía o bien representa un número cualquiera de un conjunto de números.

Para representar una variable se emplean las ultimas letras del alfabeto; r, s, t, u, v, w, x, y, z, y las podemos clasificar como dependientes o independientes.

1.1.1 Sistema numérico.

Puesto que los números son ideas básicas en la matemática, y el cálculo se basa en el sistema de los números reales y sus propiedades, iniciaremos nuestro curso con el repaso de estos conceptos.

Los números más simples, son los que normalmente utilizamos para contar, que son el conjunto de los números **naturales**:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.$$

A los que se les puede llamar también enteros positivos, representándolos o simbolizándolos por la letra N.

Si a los números naturales les agregamos sus inversos aditivos y el cero, obtenemos los **enteros**:

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A los cuales se les representa por la letra Z. Algunos autores también los designan con la letra I.

Pero cuando tratamos de medir longitudes, pesos, velocidades,.. etc. Los números enteros son inadecuados, porque están demasiado espaciados para dar la suficiente precisión y fue necesario echar mano de los cocientes (razones) entre dos números enteros, tales como:

$$\frac{2}{5}, -\frac{6}{7}, \frac{23}{5}, \frac{17}{-2}, \frac{8}{2}, \frac{-14}{1}$$

No se incluyen cocientes tales como $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$, ya que no es posible darle un significado a estas operaciones.

A todos los números que podemos expresar como el cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathrm{Z}$, se les da el nombre de **racionales** y se les representa por la letra Q.

Podemos observar que a todos los números enteros también se les puede considerar como racionales ya que $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{90}{30} = ...$ $7 = \frac{14}{2} = \frac{42}{6} = ...$
Luego: $\mathrm{Z} \subset Q$ y además $N \subset \mathrm{Z}$.

Es conveniente observar que al representar algunos números racionales en forma decimal estos serán decimales periódicos infinitos, por ejemplo:

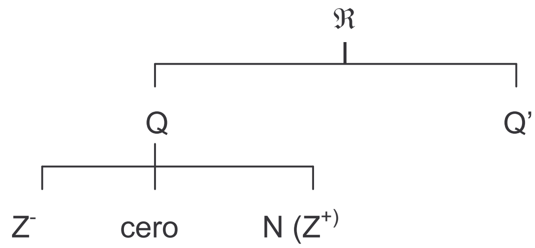
$\frac{1}{3} = 0.33333......$
$\frac{2}{3} = 0.66666......$
$\frac{35}{3} = 11.6666.....$

Algunos otros al expresarse en forma decimal tienen un conjunto finito de cifras, como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8}$, etc., por lo que a estos se les denomina racionales finitos.

También podemos observar que hay muchos números que no es posible representarlos como el cociente de dos valores enteros: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}, \pi, \sqrt{5}, ...$ etc. A este conjunto de números se les da el nombre de **irracionales** y se les representa por la letra Q'.

Si consideramos la unión de los conjuntos anteriores, racionales e irracionales, junto con sus inversos aditivos y el cero, entonces se forma el conjunto de los números **reales** $\Re$.

Si elaboramos un diagrama para ilustrar la relación entre los conjuntos anteriores, este nos queda de la siguiente manera:



O bien $N \subset Z \subset Q \subset \Re$

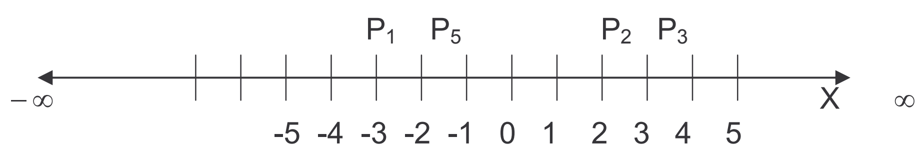
Y además $`Q' \subset \Re$

Los números reales se pueden representar gráficamente, empleando para ello una línea recta, llamada recta numérica o eje de los números reales, de tal manera que a cada punto situado sobre la recta, le corresponde un número real y a cada número le corresponde un punto sobre la recta. Es decir, se afirma que hay una *correspondencia biunívoca* entre los dos.

Los puntos situados sobre la recta, miden la distancia dirigida, a la derecha o a la izquierda, desde un punto fijo llamado origen y marcado con 0. A este número se le da el nombre de coordenada del punto.

Ejemplo 1.1 Podemos graficar los puntos cuyas coordenadas se indican;

a) P_1 (-3)
b) P_2 (5/2)
c) P_3 (π)
d) P_4 ($\sqrt{7}$)
e) P_5 ($-\frac{3}{2}$)



Recordemos que el sistema numérico se puede extender aun más con los números complejos. Estos son de la forma $a+b\sqrt{-1}$, donde a y b son números reales y $\sqrt{-1}=i$, es decir, que un numero complejo es la suma indicada de un numero real y un numero imaginario $a+bi$.

Los números reales son el elemento principal del cálculo.

1.1.2 Propiedades de los números reales.

Dados los números reales a y b, podemos sumarlos y multiplicarlos para obtener dos nuevos números reales a+b, y a*b, la adición y la multiplicación tienen las siguientes propiedades, llamadas propiedades de campo o axiomas de campo.

<u>Para la suma</u>: sean a, b y c $\in \Re$

A_1: a+b $\in \Re$ Único

A2: $a+b=b+a$ Conmutativa
A3: $(a+b)+c=a+(b+c)$ Asociativa
A4: $a+0=0+a=a$ Neutro
A5: $a+(-a)=0$ Inverso aditivo
A6: $a(b+c)=ab+ac$ Distributiva

Para la multiplicación:

M1: ab $\varepsilon \Re$ Único
M2: $ab=ba$ Conmutativa
M3: $a(bc)=(ab)c$ Asociativa
M4: $a\cdot 1=1\cdot a=a$ Neutro
M5: $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1, a\neq 0$ Inverso multiplicativo
M6: $a\cdot 0=o\cdot a=o$ Producto nulo.

De las propiedades básicas anteriores se pueden derivar muchas otras; de hecho gran parte de las operaciones algebraicas se basan, en última instancia, en estas propiedades, representando parte fundamental en el desarrollo del cálculo.

De la sección anterior, retomaremos la representación gráfica de los números reales sobre una recta numérica, añadiendo lo siguiente:

Al numero *a* asociado al punto A, sobre la recta, se le llama la coordenada de A. Se le puede asignar además una dirección a dicha recta tomándola positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda.

Por otra parte podemos observar que si a y b son dos números reales positivos y a-b es positivo, decimos que a es mayor que b y lo representamos a > b, esto es equivalente a decir que b es menor que a, lo cual se escribe b < a, a estos símbolos, **<** y **>** se les llama símbolos de desigualdad.

Ejemplo 2.1, podemos afirmar que:

$$7 > 3, \quad -4 < -1 \quad ó \quad \pi > \frac{12}{5}$$

Se puede observar, de la forma en la que está construida la recta numérica, que si se cumple a > b, entonces a debe estar ubicado a la derecha de b, si a > 0, entonces a es positivo y si a < 0, a debe ser negativo.

Para formalizar los conceptos anteriores se establecen unas propiedades, llamadas propiedades de orden que son las siguientes:

O_1: Tricotomía: Si a y b y c, son números reales, se cumple una y solo una de las siguientes propiedades.

$$a < b \quad ó \quad a = b \quad ó \quad a > b$$

O_2: Transitividad: Si a < b, y b < c, a < c.

O_3: Aditiva: Si a < b, a + c < b + c.
O_4: Multiplicativa: Cuando c > 0 (positivo) y a < b $\Rightarrow$ ac < bc. Si c < 0 (negativo) a < b $\Leftrightarrow$ ac > bc. Se observa que en este último caso, la desigualdad se invierte.

La relación de orden a $\leq$ b, se lee “a, menor o igual que b”.

Para ilustrar o ejemplificar las propiedades anteriores, podemos observar que:

1) 8 > 5, ó 8 = 8 ó 8<11.
2) Si 7 > 4 y 4 > 2 $\Leftrightarrow$ 7 > 2
3) Si 3 < 9, entonces 3 + 4 < 9 + 4 $\Leftrightarrow$ 7 < 13
4) Si 5 > 2, luego 5(7) > 2(7) $\Leftrightarrow$ 35 > 14
5) Si 5 > 2, luego 5(-7) < 2(-7) $\Leftrightarrow$ -35 < -14

1.1.3 Intervalos.

En el cálculo tienen importancia especial ciertos subconjuntos de $\Re$, a los que se les da el nombre de intervalos. Si a < b, entonces un intervalo es el conjunto de los números reales x, que son simultáneamente mayores que a y menores que b, a y b son los extremos del intervalo.

Lo anterior lo podemos representar con símbolos de la siguiente manera:

$$\left\{ x \mid a < x < b \right\}$$

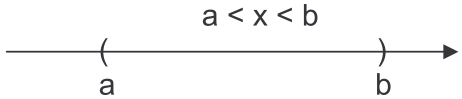
A una expresión de este tipo se le da el nombre de intervalo abierto, es decir que un intervalo será abierto cuando la variable x no pueda tomar como uno de sus valores a ninguno de los extremos.

A un intervalo abierto se le puede representar en cualquiera de las siguientes formas:

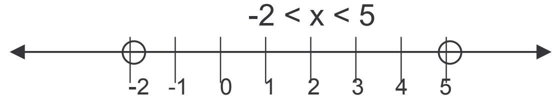
$$\left\{ x \mid a < x < b \right\}, \quad (a,\, b), \qquad]a,\, b[$$

En particular la grafica de un intervalo abierto (a, b) consta de todos los puntos que se encuentran entre los valores que corresponden a *a* y *b*. Enseguida dibujaremos las graficas de un intervalo abierto (a, b) y de los intervalos abiertos particulares (-2, 5) y (1/2, 4). Los paréntesis o “bolas huecas” en la figura se usan para indicar que los puntos extremos no están incluidos.

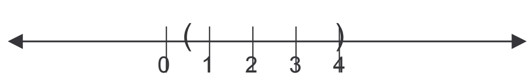
a < x < b



-2 < x < 5



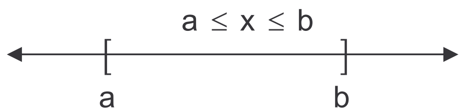
½ < x < 4

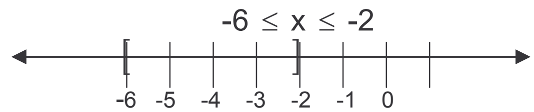


Un intervalo cerrado, denotado por $[a,b]$, se define como el intervalo en el cual una variable x si puede tomar como uno de sus valores a los extremos del intervalo:

$$[a,b]=\{\ x \mid a \leq x \leq b\}$$

Gráficamente un intervalo cerrado, se representa de la siguiente manera:





Cuando un intervalo combina los dos conceptos anteriores, entonces se le da el nombre de intervalo semiabierto o semicerrado.

$(a,b\ ]=\{x \mid a < x \leq b\}$ Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

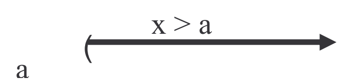
$[a,b)=\{x \mid\ a \leq x < b\}$ Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

En lo particular un intervalo recibe el nombre de infinito cuando uno de sus extremos es el infinito ∞ ò $-\infty$. (No cuando tiene un número infinito de números reales formando parte de él).

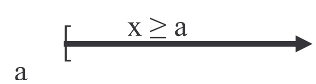
Es importante aclarar que el símbolo ∞ representa un número relativamente grande, pero no se debe interpretar como un número real especifico.

Son ejemplos de intervalos infinitos los siguientes:

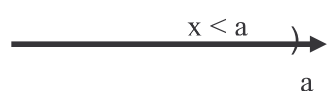
$(a,\infty)=\{x \mid a < x < \infty\}=\{x \mid x > a\}$



$[a,\ \infty)=\{x \mid\ a \leq x < \infty\}=\{x \mid x \geq a\}$



$(-\infty,\ a)=\{x \mid\ -\infty < x < a\ \}=\{x \mid\ x < a\ \}$



$(0,\ \infty)=\{x \mid 0 < x < \infty\}=\{x \mid\ x > 0\}$ Números positivos.

$(-\infty,0)=\{x \mid -\infty < x < 0\}=\{x \mid\ x < 0\}$ Números negativos.

$(-\infty,\ \infty)=\{x \mid -\infty < x < \infty\}=\Re$

Nota: se debe dejar como trabajo extraclase al alumno recordar el tema de desigualdades que se estudió en la unidad VI de matemáticas I (álgebra).

Ejercicios 1.1

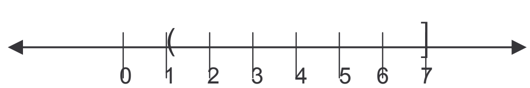
Indicar si son **verdaderas** o **falsas** cada una de las siguientes propuestas y en caso de ser verdadera, identificar cual es la propiedad de $\Re$ representada.

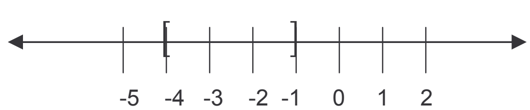
1) $4+5=5+4$
2) $7+(11+3)=(7+11)+3$
3) $3\cdot \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$
4) $8(5+2)=8\cdot 5+8\cdot 2$
5) $15-7=7-15$
6) $6+(5-1)=(5-1)+6$
7) $16\div(8\div 2)=(16\div 8)\div 2$
8) $47+0=0+47=47$
9) $12\cdot(5\cdot 3)=(12\cdot 5)\cdot 3$
10) $23(5)=5(23)$
11) $8(9-2)=(9-2)8$
12) $25-(14-6)=(25-14)-6$
13) $27\cdot 1=1\cdot 27=27$
14) $25\div 5=5\div 25$
15) $8+(-8)=0$

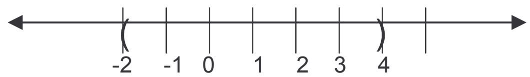
Dibuje cada uno de los siguientes intervalos en el eje numérico:

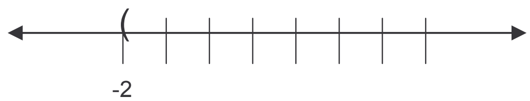
16) $(-3,2)$
17) $(1,8]$
18) $\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$
19) $\left[2,\frac{9}{2}\right)$
20) $(-\frac{3}{2},3)$
21) $(4,\infty)$
22) $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$
23) $(-\infty,1)$
24) $[-5,\infty)$
25) $(0,\infty)$

Use la notación adecuada para describir los siguientes intervalos:

26) 

27) 

28) 

29) 

30) 

1.2 Funciones y su notación

1.2.1 Concepto de función. Notación.

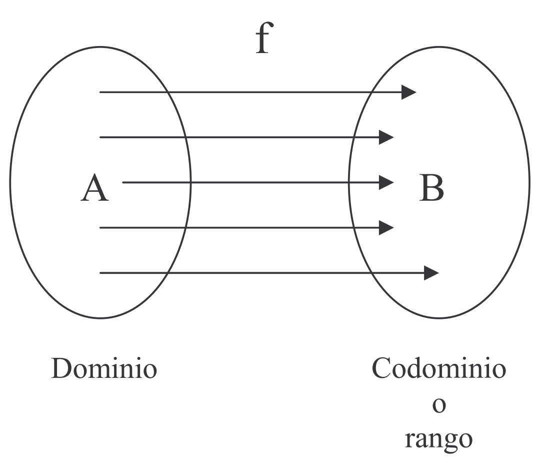
Uno de los conceptos más útiles e importantes en el cálculo es el de función. Intuitivamente consideramos que una cantidad y es una función de otra cantidad x, si existe una correspondencia entre las dos, y si además hay alguna regla por medio de la cual se asigne un solo valor a y para cada valor correspondiente de x.

Tratando de aclarar un poco más el concepto anterior, podemos afirmar que una función es una relación que se establece entre los valores de dos variables, de tal manera que el valor de una de ellas (variable dependiente) depende del valor que tome la otra (variable independiente).

O bien, en notación de conjuntos:

Si a cada elemento de un conjunto A, se le hace corresponder de alguna manera un elemento único de un conjunto B, se dice que esa correspondencia es una función.

Al conjunto A, se le llama dominio de la función y al conjunto B, codominio, rango o recorrido de la función.



Para ilustrar el concepto de función, mencionaremos algunos ejemplos con los que cotidianamente estemos familiarizados:

Ejemplo 3.1 Cuando acudimos al servicio de paquetería para realizar un envío, se nos cobra una cantidad de dinero que depende del peso del paquete que deseamos enviar, (distancia constante), observando que el costo depende del peso.

Ejemplo 4.1 Cuando hacemos la lectura en un termómetro, estamos observando la relación que hay entre la altura de la columna de mercurio y la temperatura, pudiendo además elaborar una tabla que relacione los valores entre las dos variables.

Ejemplo 5.1 Al pagar lo que se nos cobra por concepto de estacionamiento, se está relacionando el costo, con el tiempo que nuestro automóvil permaneció en el estacionamiento.

Ejemplo 6.1 Al emplear la fórmula $A = \pi r^2$, se puede apreciar que el valor que calculemos para el área depende del valor del radio.

Notación: para referirnos o representar una función podemos hacerlo de diferentes maneras:

a) En forma verbal
b) Numéricamente (empleando tablas).
c) Con gráficas.
d) Algebraicamente (con símbolos y/o fórmulas).

Para representar una función con símbolos, lo haremos de la siguiente manera:

$y = f(x)$ Que se lee: "y es igual con f de x"
Es decir: y depende de x.

Podemos emplear otras literales (incluyendo mayúsculas) para representar a una función, pero con el mismo significado:

$$y = g(x),\ y = h(x),\ s = f(t),\ r = \varphi(\Phi) \text{ etc.…}$$

1.2.2 Evaluación de funciones.

Para calcular el valor de una función, es decir de la variable dependiente, se debe sustituir el valor de la variable independiente en su argumento x, y calcular el correspondiente valor de y, o de $f(x)$, el cual recibe el nombre de *imagen*.

Ejemplo 7.1

Si $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 3$ evaluar:

a) $f(-2)$,
b) $f(0)$
c) $f(1/3)$
d) $f(x-1)$
e) $f(-x)$
f) $-f(x)$

Sol: para calcular el inciso (a) $f(-2)$, será necesario sustituir la x por -2 y simplificar el resultado.

a) $f(-2)=2(-2)^3-(-2)^2+5(-2)+3$
$=-16-4-10+3$
$f(-2)=-27$, -27 es la imagen del -2.

b) $f(0)=2(0)-0+5(0)+3$
$f(0)=3$, el 3 es la imagen del 0.

c) $f(\frac{1}{3})=2(\frac{1}{3})^3-(\frac{1}{3})^2+5(\frac{1}{3})+3$
$\frac{2}{27}-\frac{1}{9}+\frac{5}{3}+3$
$f(\frac{1}{3})=\frac{125}{27}$

En los incisos anteriores podemos observar que -2, 0, y $\frac{1}{3}$ son elementos del dominio y sus imágenes -27, 3, y $\frac{125}{27}$ son elementos del codominio.

d) $f(x-1)=2(x-1)^3-(x-1)^2+5(x-1)+3$
$=2(x^3-3x^2+3x-1)-(x^2-2x+1)+5x-5+3$
$f(x-1)=2x^3-7x^2+13x-5$

e) $f(-x)=2(-x)^3-(-x)^2+5(-x)+3$
$f(-x)=-2x^3-x^2-5x+3$

f) $-f(x)=-(2x^3-x^2+5x+3)$
$=-2x^3+x^2-5x-3$

Podemos observar que $f(-x)\neq -f(x)$

Ejemplo 8.1

Si $g(x)=\frac{1}{x}$, encuentre y simplifique $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$

Sol: $g(a+h)=\frac{1}{a+h}$ y $g(a)=\frac{1}{a}$

Luego $g(a+h)-g(a)=\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=\frac{a-a-h}{a(a+h)}=-\frac{h}{a(a+h)}$

Y además $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{h}{ah(a+h)}=-\underline{\underline{\frac{1}{a(a+h)}}}$

Ejemplo 9.1

Si $f(x)=3^x$ Verificar que: $f(x+1)-f(x-1)=\frac{8}{3}f(x)$

Sol: se tiene que:
$$f(x+1)=3^{x+1}=3\cdot 3^x$$
$$f(x-1)=3^{x-1}=3^{-1}\cdot 3^x=\frac{1}{3}\cdot 3^x$$

Luego: $f(x+1)-f(x-1)=3\cdot 3^x-\frac{1}{3}\cdot 3^x=\frac{8}{3}\cdot 3^x=\frac{8}{3}f(x)$

Ejemplo 10.1

Si $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ comprobar que: $f(\tan^2\Theta)=\sec 2\Theta$

$$f(\tan^2\Theta) = \frac{1+\tan^2\Theta}{1-\tan^2\Theta}$$

$$= \frac{\sec^2\Theta}{1-\dfrac{sen^2\Theta}{\cos^2\Theta}}$$

Sol:

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2\Theta}}{\dfrac{\cos^2\Theta - sen^2\Theta}{\cos^2\Theta}}$$

$$= \frac{1}{\cos 2\Theta}$$

$$= \sec 2\Theta \therefore f(\tan^2\Theta) = \sec 2\Theta$$

1.2.3 Grafica de una función

Se define la gráfica de una función f como el conjunto de puntos $(x, f(x))$ que satisfacen la relación $y = f(x)$, los cuales podemos ubicar o representar en un sistema de ejes coordenados. Es decir que la grafica de f, no es más que la grafica de la ecuación $y = f(x)$. Es importante notar que, como para cada valor de x en el dominio existe un solo valor $f(x)$, entonces existe solamente un punto sobre la grafica con el valor de la abscisa igual a x.

Es decir: $f^* = \{\, (x, y) \mid y = f(x) \,\}$

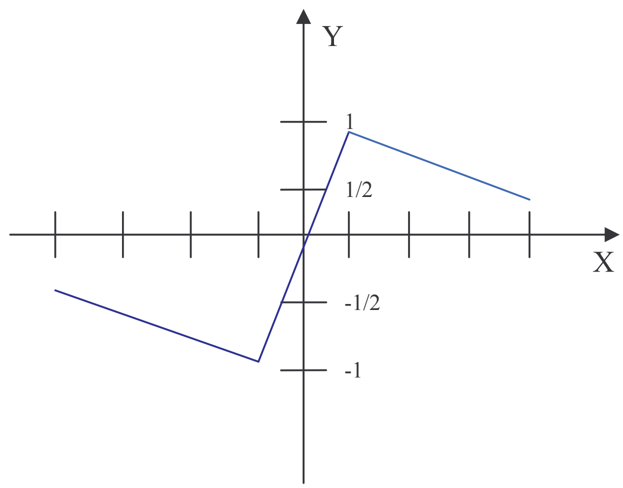
En este capitulo emplearemos el método de tabulación para graficar a una función, el cual consiste en darle valores a la variable independiente x, escogidos en forma arbitraria y calcular los correspondientes valores de y, hasta obtener un número suficiente de puntos que nos permita graficarla.

Ejemplo 11.1 Graficar la función $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$, dar su dominio, codominio, y el resto de sus características.

Primeramente haremos la tabulación:

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-8/17$	$-3/4$	$-4/5$	-1	0	1	$-4/5$	$3/4$	$8/17$

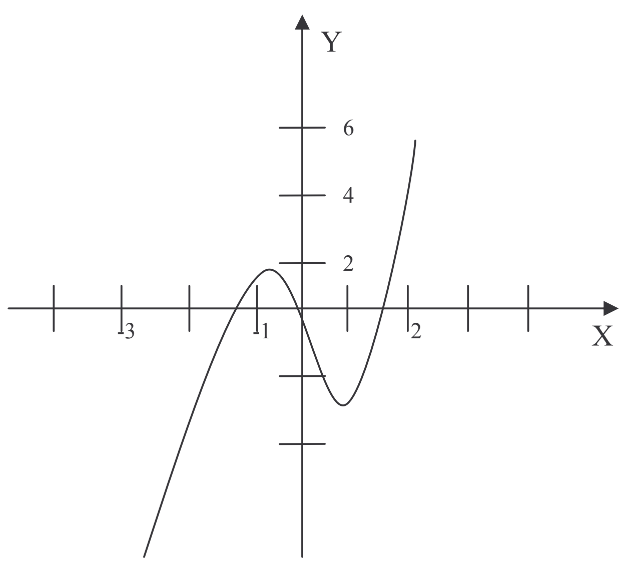
Formando las parejas de puntos (x, y) y localizándolas en el sistema de ejes coordenados, resulta:



Podemos observar que su dominio es: $D_f = \left\{ x \middle| -\infty < x < \infty \right\}$
Y el codominio es: $C_f = \left\{ y \middle| -1 \le y \le 1 \right\}$

Se aprecia que sus coordenadas al origen son 0,0, y tiene una simetría respecto del origen o bien una antisimetria respecto del eje vertical.

Ejemplo 12.1 graficar la función $y = x^3 - 2x$



$$D_f = \{x | -\infty < x < \infty\} \qquad C_f = \{y | -\infty \leq y \leq \infty\}$$

Abscisas al origen: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$
Ordenada al origen: 0
Simétrica respecto al origen.

El dominio de una función lo podemos determinar sin dibujar su grafica, considerando que el dominio o el dominio natural de una función es el conjunto más grande de números reales para el cual la función tiene sentido, es decir el conjunto de valores para los cuales la función existe.

A este concepto también se le puede llamar campo de existencia de la función:

Ejemplo 13.1 encuentre el dominio natural para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{5x-2}$
b) $g(x) = \sqrt{x^2-9}$
c) $h(x) = \dfrac{3x}{x+4}$
d) $j(x) = \dfrac{x^2}{x^2+16}$

Sol:

a) Para que $f(x) = \sqrt{5x-2}$ tenga sentido o exista se requiere que
$5x-2 \geq 0 \therefore D_f = \left\{x \middle| \dfrac{2}{5} \leq x < \infty\right\}$

b) Para que $g(x) = \sqrt{x^2-9}$ exista, es necesario que $x^2-9 \geq 0$ o $(x+3)(x-3) \geq 0$
Resolviendo; $x+3 \geq 0$ y $x-3 \geq 0$
$x \geq -3$ y $x \geq 3 \therefore x \geq 3$ es la solución.
Por otra parte: $x+3 \leq 0$ y $x-3 \leq 0$
$x \leq -3$ y $x \leq 3 \therefore x \leq -3$ es la otra parte de la solución.

Luego el dominio es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

c) Para que $h(x) = \dfrac{3x}{x+4}$ exista se requiere solamente que
$x+4 \neq 0 \therefore D = \{x | x \neq -4\}$

d) En este caso para que la función $j(x) = \dfrac{x^2}{x^2+16}$ exista, no hay restricciones, existe para cualquier valor que tenga la x, por lo tanto: $D = \{x | -\infty < x < \infty\}$

Ejercicios 1.2

Encuentre el valor de la función de cada uno de los siguientes casos:

31) Si $f(x)=x^3+4x-3$

Calcular $f(1), f(-1), f(0), f(\sqrt{2})$

32) Si $f(x)=x^2-1$

Calcular $f(1), f(-2), f(0), f(k), f(-6), f(\frac{1}{2}), f(2t), f(3x), f(\frac{1}{x})$

33) Si $f(x)=3x^2-x+2$

Calcular a) $f(a)$

b) $f(-a)$

c) $-f(a)$

d) $f(a+h)$

e) $f(a)+f(h)$

f) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h},\ h\neq 0$

34) Si $f(x)=x^3-3x+2$

Hallar $f(-2/3), f(1/2), f(2), f(x+1)$.

35) Si $g(x)=x^2+\frac{1}{x}-1$

Hallar $f(-2), f(-1), f(1), f(2)$.

36) Si $f(t)=\frac{1}{t}$

Hallar $f(t+a)-f(t-a)$

37) Si $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$

Demostrar que $f[f(x)]=x$

38) Si_ $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Probar que $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ y $f(-\frac{1}{x})=\dfrac{-1}{f(x)}$

39) Si $f(x)=2^x$

Demostrar que $f(x+3)-f(x-1)=\frac{15}{2}f(x)$ y $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=16$

40) Si $h(r)=\sqrt{\dfrac{1+r}{r}}$

Verificar que $h(\tan^2\Theta)=\csc\Theta$

Graficar las siguientes funciones, indicando su dominio y codominio.

41) $s=-4t+1$
42) $f(x)=x^2-3$
43) $g(x)=x^2+4$
44) $y=2x^2-4x+1$
45) $w=v^3$
46) $h(x)=\sqrt{x-4}$
47) $y=\dfrac{1}{x+4}$
48) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4}$
49) $y=senx$
50) $y=\cos x$

Hallar el dominio natural en cada una de las siguientes funciones

51) $y=x^2+4$
52) $y=\sqrt{x^2+4}$
53) $y=\sqrt{x^2-4}$
54) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$
55) $g(x)=\dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$
56) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
57) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
58) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$
59) $f(x)=\sqrt{1-4x}$
60) $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

1.3 Limite de una función

Otro de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo es el de límite. Para tratar de interpretarlo adecuadamente y darle un enfoque acorde al contenido de nuestro curso, definamos primero que es una sucesión.

"Una sucesión es una función en la cual el dominio de la misma está formado por el conjunto de números naturales."

Ejemplo 14.1 escribir los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $f(n)=\dfrac{n^2}{\sqrt{2n+1}}$ b) $f(n)=\dfrac{n!}{2^{n-1}}$

Sol: a) $f(n)=\dfrac{n^2}{\sqrt{2n+1}}$

Dándole a la n los primeros 5 números naturales se obtiene:

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}},f(2)=\frac{4}{\sqrt{5}},f(3)=\frac{9}{\sqrt{7}},f(4)=\frac{16}{\sqrt{9}},f(5)=\frac{25}{\sqrt{11}}$$

Luego la sucesión la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{9}{\sqrt{7}},\frac{16}{\sqrt{9}},\frac{25}{\sqrt{11}},.......$$

b) Procediendo de una manera similar con $f(n)=\dfrac{n!}{2^{n-1}}$

$$1,\frac{2}{2},\frac{6}{4},\frac{24}{8},\frac{120}{16},.....$$

Ejemplo 14.2 Analizar el limite de la sucesión

$f(n)=\dfrac{3n}{n+1}$, Conforme aumenta el valor de n.

Sol: Se tiene que:

$$\frac{3}{2},\frac{6}{3},\frac{9}{4},\frac{12}{5},\frac{15}{6},.....\overset{n=10}{\frac{30}{11}},.....\overset{n=50}{\frac{150}{51}},....\overset{n=1000}{\frac{3000}{1001}}$$

1.3.1 Concepto de límite

Sí para observar mejor el comportamiento de $f(n)$, cuando el valor de la n va aumentando, elaboramos una tabla, ésta nos queda de la siguiente manera:

n	1	2	3	4	5	10	50	100	1000	5000	10000	100000
f(n)	1.5	2	2.25	2.4	2.5	2.727	2.9411	2.9702	2.997	2.9994	2.9997	2.9999

De la observación de la misma podemos concluir que:

a) el valor de n va aumentando cada vez mas y esto lo podemos representar de la siguiente manera:

$n \longrightarrow \infty$ Que se lee “n tiende a infinito”

b) el valor de $f(n)$, es decir de los términos de la sucesión, empieza en 1.5 y va aumentando de tal forma que cada vez se aproxima más al 3, es decir, se dice que tiene como límite al numero 3 y lo representamos de la siguiente forma:

$f(n) \rightarrow 3$, la sucesión “converge” al 3.

Si ahora consideramos que x es una variable que puede tomar como uno de sus valores a cualquier término de la sucesión anterior, entonces podemos considerar que $x \longrightarrow 3$, es decir, que la x toma valores cada vez más cercanos al 3, pero nunca llega a tomar el valor de tres.

Podemos resumir el concepto anterior, afirmando que el “limite” de la variable x, es el 3.

Por otra parte, si $x \longrightarrow 3$, se tiene que:

a) $x^2 \rightarrow 9$

o

b) $4x \rightarrow 12$

Si generalizamos el concepto anterior para una función f definida en un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en el propio a, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Lo que significa que cuando $x \longrightarrow a$, $f(x) \rightarrow L$, pero la x nunca puede tomar el valor de a, ni $f(x)$ puede tomar el valor de L.

1.3.2 Teorema sobre límites

Para poder evaluar el límite de una función, deberemos basarnos en algunos teoremas establecidos para tal fin. La demostración de dichos teoremas esta fuera del alcance de nuestro curso, debido a lo cual nos concretaremos en escribirlos y analizar su aplicación.

Teoremas sobre límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = A_2$

Luego:

1) $\lim_{x\to a} c = c,$ siendo c = cte.

2) $\lim_{x\to a} x = a$

3) $\lim_{x\to a} Cf(x) = C \lim_{x\to a} f(x) = CA_1$

4) $\lim_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A_1 \pm A_2$

5) $\lim_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A_1 \cdot A_2$

6) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}$

7) $\lim_{x\to a} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A_1^n$

8) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A_1}$

Estos importantes teoremas los podemos recordar mejor si se interpretan con palabras. Por ejemplo, el teorema 4 se interpreta como: “el limite de una suma es igual a la suma de sus imites”.

El teorema 5 se interpreta afirmando que: “el limite de un producto es igual al producto de sus limites”.

Ejemplo 15.1 hallar $\lim_{x\to -2}(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 4)$

Aplicando los teoremas correspondientes, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2}(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 4) &= 2\lim_{x\to -2} x^4 - \lim_{x\to -2} x^3 + 3\lim_{x\to -2} x^2 - 5\lim_{x\to -2} x + \lim_{x\to -2} 4 \\ &= 2(16) - (-8) + 3(4) - 5(-2) + 4 \\ &= 66 \end{aligned}$$

Resultado que se interpreta como: cuando $x \to -2$

Luego $f(x) \to 66$

Ejemplo 16.1 Encontrar $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3 - x^2 + 4x - 1}{3x^2 - 5x + 3}$

Sol: $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2+4x-1}{3x^2-5x+3}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^3-x^2+4x-1)}{\lim_{x\to 3}(3x^2-5x+3)}=\frac{27-9+12-1}{27-15+3}=\frac{29}{15}$

Entonces cuando: $x\to 3$

$$f(x)\to\frac{29}{15}$$

Ejemplo 17.1 Hallar $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{3x^2+5}}{x+2}$

Sol: $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{3x^2+5}}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}(\sqrt[4]{3x^2+5})}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{\sqrt[4]{12+5}}{4}=\frac{\sqrt[4]{17}}{4}$

Entones cuando $x\to 2$

$$y\to\frac{\sqrt[4]{17}}{4}$$

Ejemplo 18.1 Evaluar $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2+3x-4}$

Sol: $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\frac{3-1-2}{1+3-4}=\frac{0}{0}=$ *indeterminación*

En un caso como el anterior, se puede evitar la indeterminación factorizando al numerador y denominador.

Luego: $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+2)(x-1)}{(x-1)(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{x+4}=\frac{5}{5}=1$

Entonces: cuando $x\to 1,\quad f(x)\to 1$

Ejemplo 19.1 Hallar $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Sol: $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\frac{2-2}{49-49}=\frac{0}{0}=indeterminación.$

En este caso, para evitar la indeterminación, debemos racionalizar y luego factorizar:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=-\frac{1}{56}$$

1.3.3 Limite cuando la variable tiende a infinito

Falta analizar el caso que se nos presenta cuando la variable tiende a tomar un valor muy grande, es decir cuando la variable tiende a infinito. El procedimiento para el calculo del limite es igual, solamente debemos considerar las operaciones algebraicas que se pueden realizar con el símbolo ∞.

a) $\infty + \infty = \infty$
b) Si $a > 0, a \cdot \infty = \infty$
c) Si $a < 0, a \cdot \infty = -\infty$
d) $(+\infty)(+\infty) = \infty$
e) $(+\infty)(-\infty) = -\infty$
f) $\infty - \infty =$ indeterminación.
g) $0 \cdot \infty =$ indeterminación.
h) $\dfrac{\infty}{\infty} =$ indeterminación.
i) $\infty \pm a = \infty$

Ejemplo 20.1 Hallar $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 3}{2x^3 + x + 7}$

Sol: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 3}{2x^3 + x + 7} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación.$

En este caso para evitar la indeterminación, debemos dividir toda la fracción entre la variable elevada a la mayor potencia.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 3}{2x^3 + x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{1 + 0 - 0}{2 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 21.1 Evaluar $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + x - 9}{x^4 + 5x^2 + 3}$

Sol: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + x - 9}{x^4 + 5x^2 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{9}{x^4}}{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$

Cuando $x \to \infty, y \to 0$

Ejemplo 22.1 Evaluar $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x^4 + 4}}$

Sol: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x^4+4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^8}}} = \dfrac{3}{\sqrt{1}} = 3$

Cuando $x \to \infty, y \to 3$

1.4 Funciones continuas

La palabra continua es utilizada en la matemática y en lo particular en el cálculo con el mismo significado que en el lenguaje ordinario, es decir que empleamos la palabra continua para describir un proceso que sigue sin cambios repentinos.

Para describir o definir cuando una función es continua lo podemos hacer en distintas formas, de una manera concreta y de acuerdo al contenido de nuestro curso, diremos que una función es continua cuando existe para todos los valores de x, es decir cuando su dominio natural es $\Re$. Gráficamente afirmamos que es continua cuando al trazar su gráfica no hay necesidad de despegar el lápiz para realizarla.

Analizaremos algunos ejemplos que nos ilustran cuando una función no es continua.

Ejemplo 23.1 Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ b) $g(x) = \dfrac{x^4-3x+1}{x^2-x-6}$ c) $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$ e) $f(t) = t^2 - 3t + 7$

Sol:

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ es discontinua para $x = -1$, ya que para este valor f no existe.

b) $g(x) = \dfrac{x^4-3x+1}{x^2-x-6}$ es continua para todos los valores de x, excepto para $x = 3$ y -2

c) $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ presenta discontinuidad en 2 y -2.

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$ es continua solamente en el intervalo $(-5, \infty)$.

e) $f(t) = t^2 - 3t + 7$ es continua para todos los valores de t.

Ejercicios 1.2

61) $\lim_{x \to -3} (2x^4 - 5x^3 - x^2 - 9x + 3)$

62) $\lim_{t \to \frac{1}{2}} \frac{t^3 - 5t + 2}{t^2 + 3t + 1}$

63) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8}}{2x + 3}$

64) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$

65) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 6x + 5}$

66) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$

67) $\lim_{x \to -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{x^2 - 4}$

68) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

69) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

70) $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{4 - x} - \sqrt{6}}{x + 2}$

71) $\lim_{m \to 0} \frac{\sqrt{4 + m + m^2} - 2}{m}$

72) $\lim_{x \to 4} \frac{\frac{x}{x - 3} - 4}{x - 4}$

73) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + x + 6}{3x^2 + 1}$

74) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 + 4x - 7}$

75) $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^3 + x^2 - 12x + 4}{3x^2 - 15x + 7}$

76) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 + 8x - 5}{x^3 + 1}$

77) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - x^3 + 5x}{\sqrt{4x^4 - 27}}$

78) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$

79) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2}{4 + 3x\sqrt{x}}$

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

80) $f(x) = \dfrac{5x}{1+x}$

81) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

82) $h(x) = \sqrt{x+3}$

83) $y = 2x^3 - x^2 + 11$

84) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3x + 2}$