UNIDAD VII. “LA HIPÉRBOLA”.

DEFINICIÓN:

La Hipérbola es el conjunto de puntos en el plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos en el mismo plano, llamados focos, es constante e igual a ***2a***.

7.1 Ecuación en forma común o canónica de la hipérbola.

7.1.1 Elementos:

En la gráfica dada a continuación (Fig. 1) es posible encontrar los elementos siguientes:

C → Centro.
V → Vértices.
F → Focos.

Asíntotas (rectas que se cortan en el centro)
a = $\overline{CV}$ → Semieje real (transverso)
b = $\overline{CB}$ → Semieje imaginario (conjugado)
c = $\overline{CF}$ → Semieje focal.

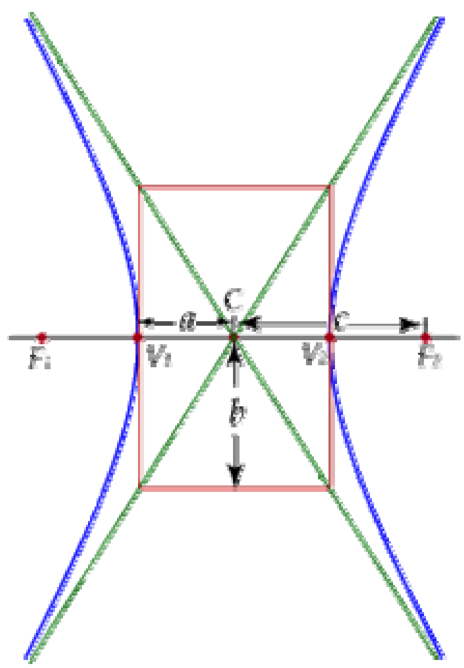

Fig. 1.

Convencionalmente se utilizan los subíndices ($_1$) para los elementos que se localizan abajo y a la izquierda del centro y ($_2$) para los que están arriba y a la derecha del centro.

Relación matemática entre a, b y c.

Es posible comprobar geométricamente que la distancia del centro a cualquiera de los focos es exactamente igual a la distancia de un vértice a cualquiera de los extremos del eje imaginario (Fig. 2)

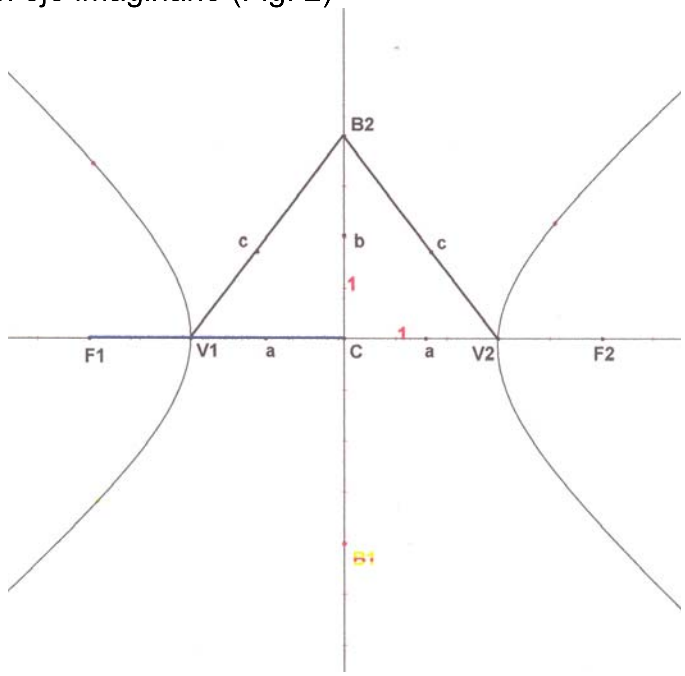

Fig. 2

De la figura anterior se puede ver que: $c^2 = a^2 + b^2$

7.1.2. Ecuaciones de la hipérbola cuyo centro está en el origen

A) Eje real paralelo al eje X.

En la gráfica (Fig. 3) se puede observar que: $d_1 = \overline{PF_1}$ y $d_2 = \overline{PF_2}$, de donde, por la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

De la definición de la hipérbola se tiene que $d_1 - d_2 = 2a$, y sustituyendo:

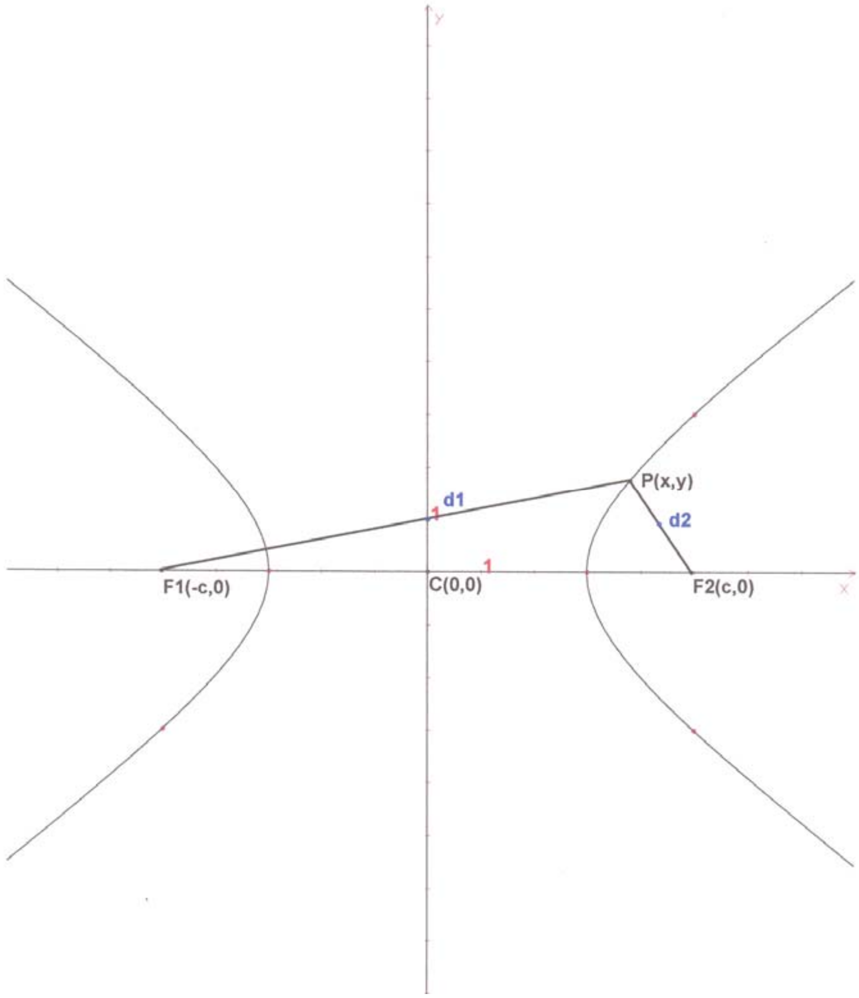

Fig. 3

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$, despejando la primera raíz:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; elevando al cuadrado ambos miembros:

$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$; desarrollando:

$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$, desarrollando:

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$; despejando:

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, reduciendo:

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, dividiendo por 4 ambos miembros:

$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; elevando nuevamente al cuadrado:

$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$; desarrollando:

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$; enviando términos en ***x*** e ***y*** al lado izquierdo:

$c^2x^2 - 2a^2cx - a^2x^2 + 2a^2cx - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$; reduciendo términos semejantes:

$(c^2x^2 - a^2x^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$; factorizando:

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$; por la relación entre a, b y c:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$; sustituyendo:

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; dividiendo todo por ***a²b²***:

$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$; simplificando:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

B) Eje real paralelo al eje Y.

De forma similar es posible llegar a la ecuación cuando el eje real es vertical (paralelo al eje Y) y se deja como ejercicio al alumno. En este caso la ecuación resultante deberá ser:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ecuaciones de las asíntotas:

De la figura 1, se observa que las asíntotas, además de pasar por el origen, pasan por los vértices del rectángulo formado por las distancias entre los vértices y las distancias entre los extremos del eje imaginario, dos de estos vértices son los que tienen coordenadas (*a*, *b*) y (–*a*, *b*).

Dado que se conocen dos puntos por donde pasa la asíntota, se puede utilizar la ecuación dos puntos vista en la unidad II: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Sustituyendo las coordenadas del centro (0, 0), y del vértice (*a*, *b*), se tiene:

$y - 0 = \frac{b - 0}{a - 0}(x - 0)$, simplificando: $y = \frac{b}{a}x$

Para la otra asíntota, las coordenadas que se van a sustituir en la ecuación son las del centro (0, 0) y las del otro vértice (–*a*, *b*), por lo que se tiene:

$y - 0 = \frac{b - 0}{-a - 0}(x - 0)$, simplificando: $y = -\frac{b}{a}x$

Excentricidad:

La excentricidad, al igual que en la elipse, representa la relación entre las distancias de foco a foco y de vértice a vértice, esto es:

$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$. Ahora bien, por la relación entre *a*, *b* y *c*, se observa que *c* es mayor que *a* y que *b*, por lo tanto **la excentricidad en la hipérbola siempre es mayor que la unidad**: $e > 1$

Lado Recto:

También en la hipérbola se pueden calcular las longitudes de los lados rectos, para lo cual se utiliza la misma ecuación que en la elipse:

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$$

EJEMPLO 1.7

Hallar la ecuación de la hipérbola concentro en el origen, eje real paralelo al eje 0x, uno de cuyos vértices está en (–3, 0) y uno de sus focos en (5, 0). Determinar, además, las coordenadas de los extremos del eje imaginario y las ecuaciones de sus asíntotas.

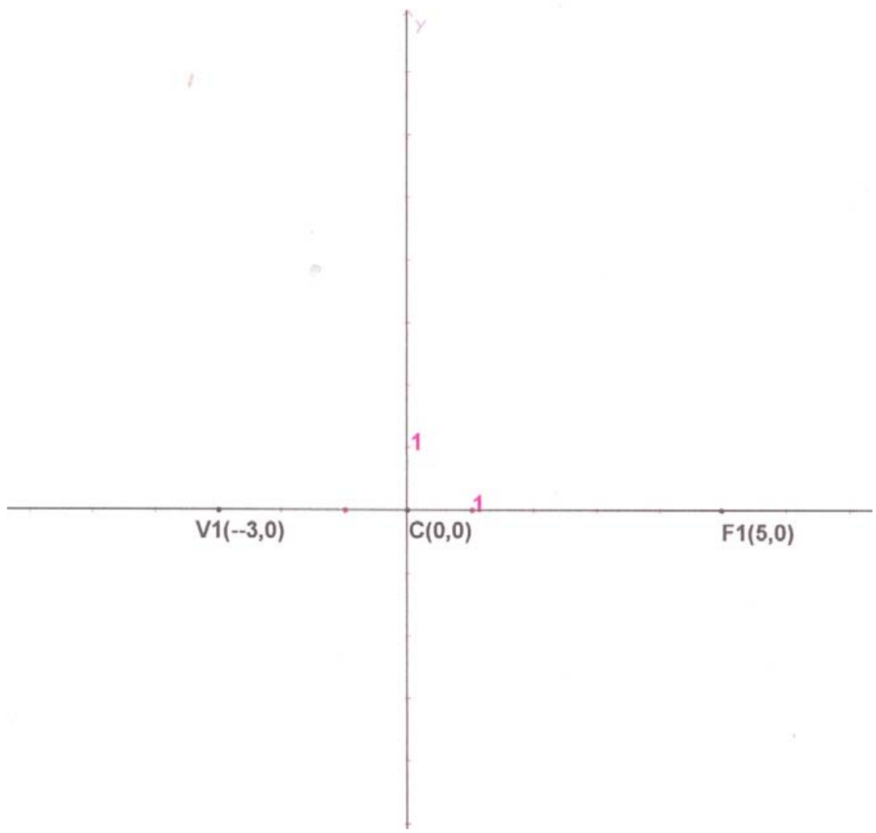

Fig. 4

Para comenzar, al observar la figura 4, la distancia CV1 = 3 y es igual al valor de ***a***, y la distancia CF2 = 5, que equivale al valor de ***c***. haciendo uso de la relación entre a, b y c se tiene:

$c^2 = a^2 + b^2$ $\quad b^2 = c^2 - a^2$ $\quad b^2 = (5)^2 - (3)^2$

$b^2 = 25 - 9$ $\quad b^2 = 16$ $\quad \sqrt{b^2} = \sqrt{16}$ $\quad b = 4$

Dado que los vértices y los focos están sobre el eje X, el eje real es horizontal y la ecuación correspondiente:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Sustituyendo los valores de a y b:

$$\frac{x^2}{(3)^2}-\frac{y^2}{(4)^2}=1$$

La ecuación pedida es, por tanto:

$$\boxed{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1}$$

Para los extremos del eje imaginario, es necesario avanzar desde el centro y de manera perpendicular al eje real, una distancia igual a b, tanto en un sentido como en otro, con lo cual se llega a los puntos $B_1(0, -4)$ y $B_2(0, 4)$.

Las ecuaciones de las asíntotas se obtienen a partir de las ecuaciones correspondientes al eje real horizontal, esto es:

$y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$, sustituyendo los valores de a y b, se obtiene:

$y=\frac{4}{3}x$ y $y=-\frac{4}{3}x$; que igualando a cero y ordenando quedan:

$\underline{4x-3y=0}$ y $\underline{4x+3y=0}$.

EJEMPLO 2.7

Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje real paralelo al eje Y, si uno de sus focos está en (0, –10) y uno de los extremos del eje imaginario es el punto (8, 0). Dar también las coordenadas de sus vértices, el valor de su excentricidad y la longitud de su lado recto.
Como se puede observar en la figura 5, las distancias CV1 y CB1 equivalen a los valores de c y b, respectivamente, y dado que el eje real es vertical, la ecuación correspondiente es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Pero no se tiene el valor de a, por lo que utilizando la relación entre a, b y c: $c^2 = a^2 + b^2$, de donde: $a^2 = c^2 - b^2$, sustituyendo y efectuando operaciones:

$a^2 = (10)^2 - (8)^2$ $\qquad$ $a^2 = 100 - 64$ $\qquad$ $a^2 = 36$ $\qquad$ y $\qquad$ $a = 6$

Sustituyendo los valores de a y b:

$$\frac{y^2}{(6)^2} - \frac{x^2}{(8)^2} = 1$$

$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$, que es la ecuación pedida.

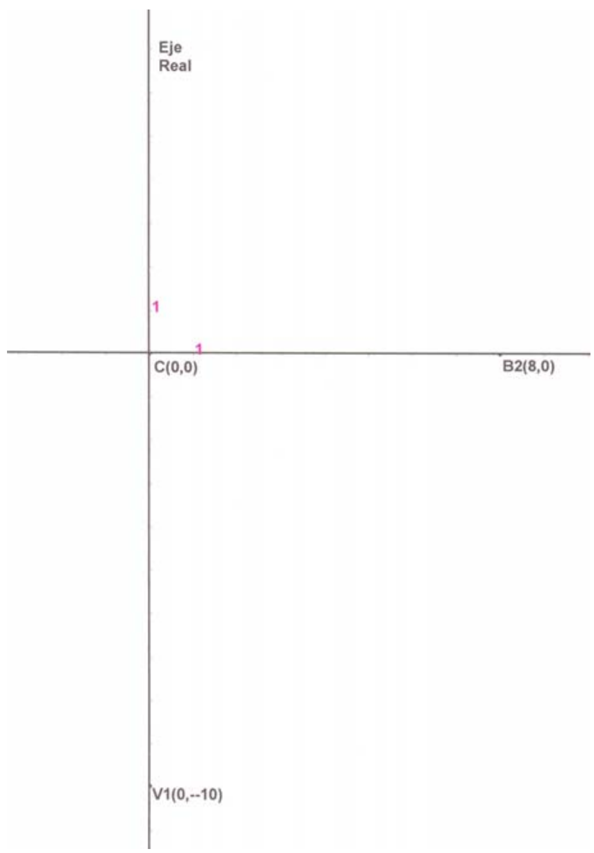

Figura 5.

Para la excentricidad:

$e = \frac{c}{a}$ $\qquad$ $e = \frac{10}{6}$, simplificando: $e = \frac{5}{3}$. Nótese que aunque en este caso la excentricidad vale $\frac{5}{3}$, $c \neq 5$ y $a \neq 3$.

Para el lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$. Sustituyendo valores:

$$\overline{LR} = \frac{2(8)^2}{6} \qquad \underline{\overline{LR} = \frac{64}{3}}$$

Ejercicios:

7.1 Encontrar la expresión matemática para la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen y su eje mayor es paralelo al eje 0y (eje vertical).

7.2 Los focos y los vértices de una hipérbola son los puntos: *F(5, 0), F'(-5, 0),* V_1*(4, 0)* y V_2*(-4, 0)*, respectivamente. Determine la ecuación de la hipérbola. Dibujar su gráfica e indicar las asíntotas.

7.3 Utilizando un procedimiento similar al del apartado 7.1.4(¿), demuestra que las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola, cuyo eje real es vertical, son: $y = \frac{a}{b}x$, y $y = -\frac{a}{b}x$.

7.4 Dada la hipérbola cuya ecuación viene dada por: $7y^2 - 9x^2 = 63$. Determine: coordenadas de los focos, de los vértices, y ecuaciones de las asíntotas. Trace la gráfica.

7.1.3. Ecuación de la hipérbola cuyo centro no está en el origen

El procedimiento algebraico para la deducción de las ecuaciones de la hipérbola con centro en cualquier punto fuera del origen es similar al realizado anteriormente para cuando el centro está en el origen y se deja al estudiante como ejercicio. Las ecuaciones correspondientes a las dos posibles situaciones del eje real (horizontal o vertical) son:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Eje Real *horizontal* (paralelo al eje X).

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \rightarrow$$ Eje Real *vertical* (paralelo al eje Y).

De igual modo, es posible demostrar que las ecuaciones de las asíntotas para los dos casos citados arriba son:

$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h) \rightarrow$ Eje Real *horizontal* (paralelo al eje X).

$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h) \rightarrow$ Eje Real *vertical* (paralelo al eje Y).

Las fórmulas para el cálculo de la excentricidad y el lado recto son las mismas que las usadas anteriormente.

EJEMPLO 3.7

El centro de una hipérbola esta en (–3, 2), su distancia focal es de 10 unidades y uno de los vértices es el punto (1, 2). Hallar su ecuación y determinar las coordenadas de los focos y de los extremos del eje imaginario, así como las ecuaciones de sus asíntotas.

En la gráfica de la Figura 6, se observa que la distancia CV2 es igual a 4 (a = 4), en tanto que la distancia focal es igual a 10, esto es 2c = 10, por lo tanto c = 5. de la relación entre a, b y c se calcula el valor de b:

$$c^2=a^2+b^2 \qquad b^2=c^2-a^2 \qquad b^2=(5)^2-(4)^2$$

$$b^2=25-16 \qquad b^2=9 \qquad \sqrt{b^2}=\sqrt{9} \qquad b=3$$

$$b^2=c^2-a^2 \qquad b^2=(5)^2-(3)^2$$

$$b^2=25-9 \qquad b^2=16 \qquad \sqrt{b^2}=\sqrt{16} \qquad b=4$$

Como el eje real debe pasar por el centro, los vértices y los focos, por inspección de la gráfica se observa que dicho eje es horizontal, por lo que la ecuación es:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, y sustituyendo valores se obtiene: (–3, 2)

$\frac{(x-(-3))^2}{(4)^2}-\frac{(y-2)^2}{(3)^2}=1$ y efectuando operaciones:

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1$$, que es la ecuación solicitada.

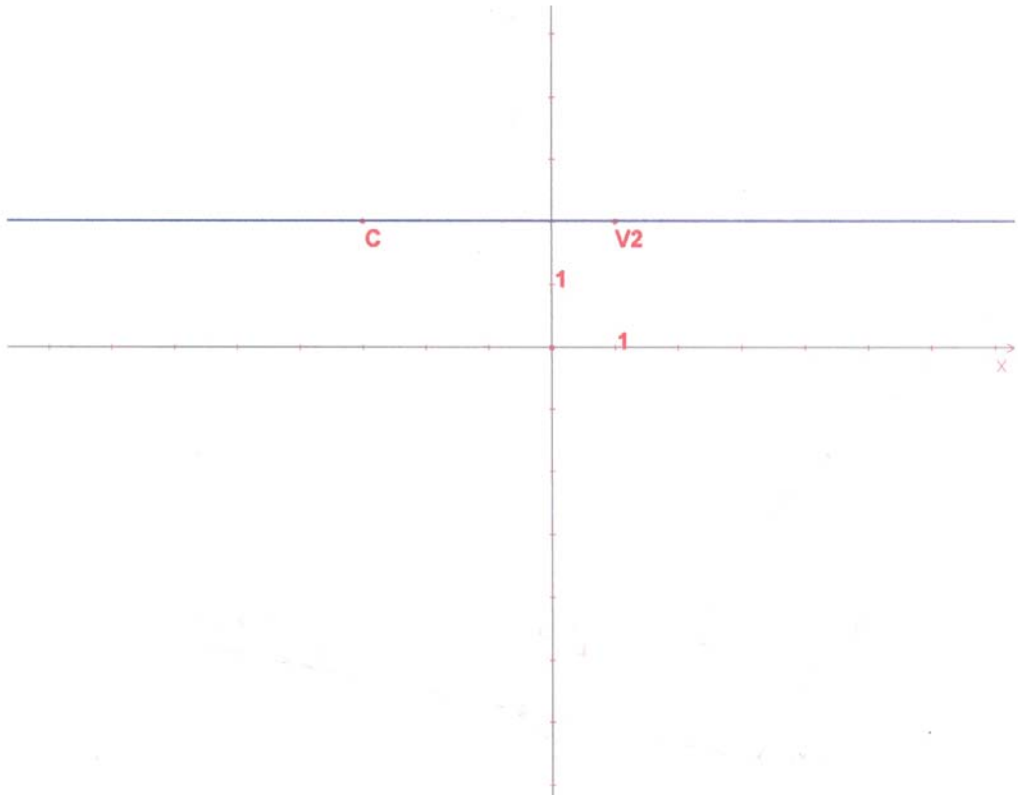

Fig. 6

Para los focos, si a partir del centro se avanza el valor de c a la izquierda y a la derecha respectivamente, se obtienen los puntos $F_1(-8, 2)$ y $F_2(2, 2)$.

Para los extremos del eje imaginario ahora se avanza el valor de b desde el centro, perpendicularmente al eje real, en este caso hacia abajo y hacia arriba obteniéndose $B_1(-3, -1)$ y $B_2(-3, 5)$.

Finalmente, las ecuaciones de las asíntotas son:

$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, sustituyendo valores.

$y-2=\pm\frac{3}{4}(x-(-3))$ y efectuando operaciones y separando por signos:

$y-2=\frac{3}{4}(x+3)$ $\quad 4y-8=3x+9 \quad \underline{3x-4y+17=0}$

$y-2=-\frac{3}{4}(x+3) \qquad 4y-8=-3x-9 \qquad \underline{3x+4y+1=0}.$

7.2 Ecuación en forma general.

De forma similar como ocurrió en la elipse, la ecuación de una hipérbola se puede expresar en forma general desarrollando los binomios, simplificando, igualando a cero y reordenando términos para llegar a:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

En la cual, las características que debe de tener para representar una hipérbola son: $A \neq C$, de tal forma que $(A)(C)<0$.

7.3 Obtención de la ecuación a partir de algunos de sus elementos.

En esta sección se analiza la manera de llegar a la ecuación general de una hipérbola a partir de algunos de los elementos y sustituyéndolos en la ecuación canónica.

EJEMPLO 4.7

El centro de una hipérbola es el punto (3, 2), uno de sus focos está en (3, –8) y su excentricidad es $\frac{5}{4}$. Hallar su ecuación en forma general y determinar las coordenadas de sus vértices y de los extremos de su eje imaginario, así como la longitud del lado recto. Trazar su gráfica.

C(3, 2) $\rightarrow$h = 3 y k = 2.

Si F_1(3, –8), en la gráfica (Figura 5) se puede observar que c = 10.

Como $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, sustituyendo el valor de c.

$\frac{10}{a}=\frac{5}{4} \qquad (4)(10)=5a \qquad a=\frac{40}{5}=8.$ Nótese que $c \neq 5$ y $a \neq 4$.

Y a partir de la relación matemática entre a, b y c es posible calcular el valor de ***b***:

$c^2=a^2+b^2 \qquad b^2=c^2-a^2 \qquad b^2=(10)^2-(8)^2 \qquad b^2=100-64$

$b^2 = 36$ $\sqrt{b^2} = \sqrt{36}$ b = 6.

Por la ubicación del foco se sabe que el eje real es paralelo al eje Y, y la ecuación correspondiente es:

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, y sustituyendo valores:

$\frac{(y-2)^2}{(8)^2} - \frac{(x-3)^2}{(6)^2} = 1$, desarrollando los cuadrados:

$\frac{y^2-4y+4}{64} - \frac{x^2-6x+9}{36} = 1$, sumando las fracciones:

$\frac{9(y^2-4y+4)-16(x^2-6x+9)}{576} = 1$, efectuando operaciones:

$9y^2 - 36y + 36 - 16x^2 + 96x - 144 = 576$, igualando a cero y reordenando:

$0 = 16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y + 684$, o

$16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y + 684 = 0$, que es la ecuación solicitada.

Para las coordenadas de los vértices, si en la gráfica se avanza desde el centro el valor de a = 8, hacia arriba y hacia abajo se llega respectivamente a los puntos $V_2(3, 10)$ y $V_1(3, -6)$.

De igual forma, para las coordenadas de los extremos del eje imaginario se avanza el valor de b = 6 desde el centro, pero ahora hacia la izquierda y hacia la derecha para llegar a los puntos $B_1(-3, 2)$ y $B_2(6, 2)$.

El lado recto se puede calcular mediante la ecuación $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$. Sustituyendo valores: $\overline{LR} = \frac{2(6)^2}{10}$, efectuando y simplificando: $\overline{LR} = \frac{36}{5}$.

La gráfica es la siguiente:

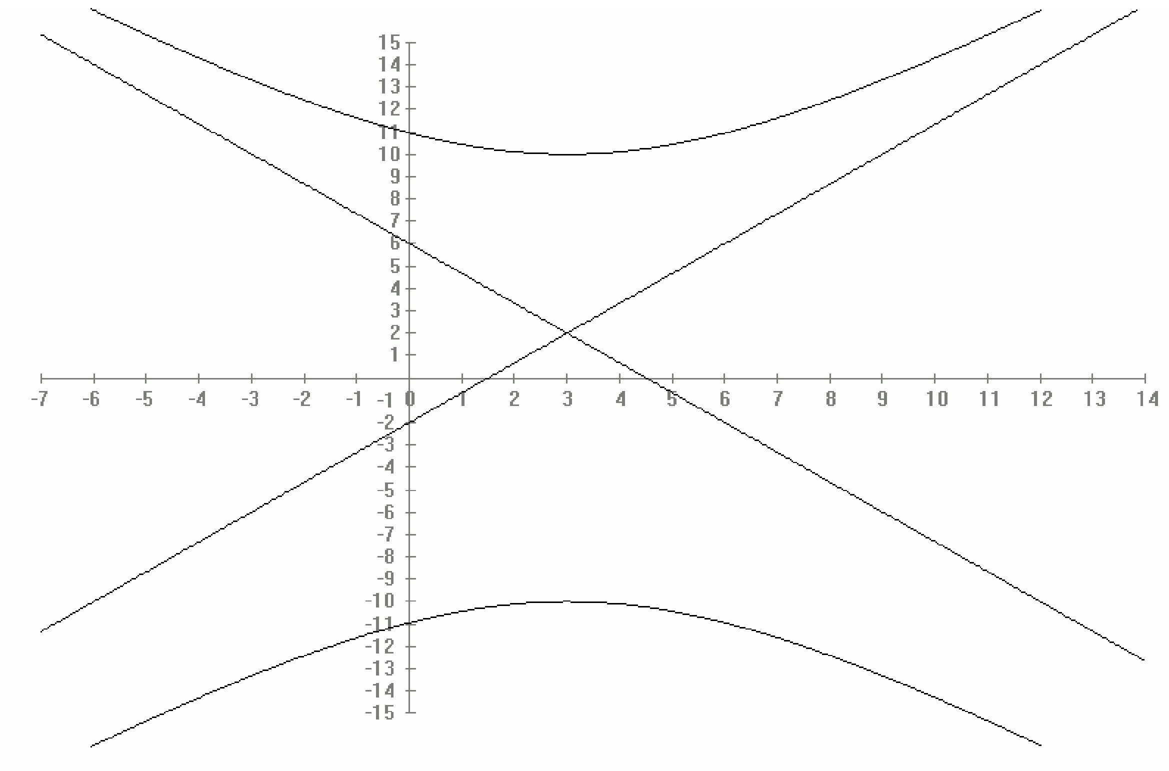

Figura 7

7.4 Cálculo de los parámetros de la hipérbola dada su ecuación.

Si se suministra como dato la ecuación de una hipérbola en forma general, es posible reducirla a su forma canónica, como se hizo con la elipse, y a partir de ella y con auxilio de la gráfica correspondiente determinar todos sus elementos.

EJEMPLO 5.7

La ecuación de una hipérbola es $4x^2 - 100y^2 + 24x + 200y - 464 = 0$. Reducirla a su forma canónica y determinar todos sus elementos. Trazar su gráfica.

$4x^2 - 100y^2 + 24x + 200y - 464 = 0$, agrupando y despejando:

$(4x^2 + 24x) - (100y^2 - 200y) = 464$ (Obsérvese el signo de 200y), factorizando:

$4(x^2 + 6x) - 100(y^2 - 2y) = 464$, completando trinomios y equilibrando:

$4(x^2+6x+9)-100(y^2-2y+1)=464+36-100$, factorizando y simplificando

$4(x+3)^2-100(x-1)^2=400$, dividiendo por 400 ambos miembros:

$\frac{4(x+3)^2}{400}-\frac{100(y-1)^2}{400}=\frac{400}{400}$ y simplificando:

$\frac{(x+3)^2}{100}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$, ecuación que se corresponde a la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, o sea, cuando la hipérbola tiene su eje real paralelo a Y.

A partir de dicha ecuación se tiene:

$-h=3$, o $h=-3$,
$-k=-1$ o $k=1$,
$a^2=100$ o $a=10$ y
$b^2=4$ o $b=2$

Por la relación matemática entre a, b y c:

$c^2=a^2+b^2$, sustituyendo: $c^2=100+4$, esto es: $c^2=104$, o $c=\sqrt{104}$

Para las coordenadas: el centro, por tanto es el punto (–3, 1).

Los vértices se localizan como en el ejemplo 4.7: $V_1(-13, 1)$ y $V_2(7, 1)$

Los focos están en: $F_1(-3-\sqrt{104}, 1)$ y $F_2(-3+\sqrt{104}, 1)$.

Los extremos del eje imaginario son: $B_1(-3, -1)$ y $B_2(-3, 3)$.

Para la excentricidad: $e=\frac{c}{a}$, sustituyendo valores $e=\frac{\sqrt{104}}{10}$.

Para la longitud de los lados rectos: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$ y sustituyendo a y b se tiene

$\overline{LR}=\frac{2(2)^2}{10}$, o simplificando $\overline{LR}=\frac{4}{5}$.

Para las ecuaciones de las asíntotas, por ser el eje real horizontal:

$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$, de donde sustituyendo los valores de ***h, k ,a y b***:

$y-1=\pm\frac{2}{10}(x-(-3))$, simplificando:

$y-1=\pm\frac{1}{5}(x+3)$, separando por signos:

$5(y-1)=1(x+3)$ $\quad 5y-5=x+3$ $\quad \underline{x-5y+8=0}$

$5(y-1)=-1(x+3)$ $\quad 5y-5=-x-3$ $\quad \underline{x+5y-2=0}$

7.5 CONDICIONES PARA QUE UNA ECUACIÓN DEL TIPO $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ SEA UNA HIPÉRBOLA.

Hasta este momento, la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ puede representar una recta, una circunferencia, una parábola, una elipse o bien una hipérbola, dependiendo de los valores de A y C:

Si A = C = 0 se trata de una recta.
Si A = C $\neq$ 0 es una circunferencia.
Si A = 0 o C = 0 se tiene una parábola.
Si A $\neq$ C y (A)(C) > 0 se esta hablando de una elipse.

Ahora, para que esta ecuación represente una hipérbola es necesario que A $\neq$ C y (A)(C) < 0

Los casos que se pueden presentar son **solamente dos**, ya que a diferencia de la elipse y la circunferencia, aquí, por la condición (A)(C) < 0 se permite que los signos de los términos se inviertan (Fe de erratas: en el programa marca los tres)

7.5.1 La hipérbola representa una hipérbola real.

Este caso se presenta cuando en el procedimiento al llegar al paso en el que se divide por el resultado éste es diferente de cero (pudiendo ser positivo o negativo)

Ejemplo 6.7.

Dada la ecuación de la hipérbola en forma general, reducirla a su forma canónica y determinar el valor de todos y cada uno de sus elementos, incluyendo las ecuaciones de las asíntotas y trazar la gráfica.

$$4x^2 - 5y^2 + 8x - 10y + 19 = 0$$

Aplicando el procedimiento visto en el ejemplo 5.7:

$(4x^2 + 8x) - (5y^2 + 10y) = -19$
$4(x^2 + 2x) - 5(y^2 + 2y) = -19$
$4(x^2 + 2x + 1) - 5(y^2 + 2y + 1) = -19 + 4 - 5$
$4(x+1)^2 - 5(y+1)^2 = -20$ nótese el signo (–) en el resultado.
$\dfrac{4(x+1)^2}{-20} - \dfrac{5(y+1)^2}{-20} = \dfrac{-20}{-20}$
$\dfrac{(x+1)^2}{-5} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$ o bien:
$\dfrac{(y+1)^2}{4} - \dfrac{(x+1)^2}{5} = 1$ que corresponde a una hipérbola con centro fuera del origen y eje real vertical (paralelo a Y), de donde:

$-k = 1$, o $k = -1$
$-h = 1$, o $h = -1$
$a^2 = 4$ y $a = 2$
$b^2 = 5$ y $b = \sqrt{5}$, por la relación entre a, b y c:
$c^2 = a^2 + b^2$, esto es: $c^2 = 4 + 5$ o bien $c^2 = 9$, de donde $c = 3$.

Por la gráfica correspondiente (Fig. #) puede determinarse:

C(–1, –1), V_1(–1, –3), V_2(–1, 1), F_1(–1, –4), F_2(–1, 2), $B_1(-1-\sqrt{5}, -1)$, $B_2(-1+\sqrt{5}, -1)$.

La excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$, sustituyendo: $e = \dfrac{3}{2}$

La longitud de los lados rectos: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$, sustituyendo valores

$\overline{LR} = \dfrac{2(\sqrt{5})^2}{2}$, y efectuando operaciones: $\overline{LR} = 5$

Las ecuaciones de las asíntotas: por la posición del eje real paralelo a Y, las ecuaciones de las asíntotas son:

$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$, sustituyendo los valores correspondientes:

$$y-(-1)=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(x-(-1))$$

$y+1=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1)$, utilizando el signo (+):

$\sqrt{5}(y+1)=2(x+1)$, efectuando, igualando a cero y reordenando:

$$\underline{2x-\sqrt{5}y+2-\sqrt{5}=0}$$

Si ahora se usa el signo (–):

$\sqrt{5}(y+1)=-2(x+1)$, efectuando, igualando a cero y reordenando:

$$\underline{2x+\sqrt{5}y+\sqrt{5}+2=0}$$

7.5.2 La hipérbola degenera en dos rectas que se cortan.

Este caso se tiene cuando el resultado en el paso correspondiente es igual a cero.

Ejemplo 7.7

Dada la ecuación $16x^2-25y^2-96x+50y+119=0$, reducirla la forma canónica y determinar si retrata de una hipérbola o de dos rectas que se cortan. En el primero de los casos, determinar todos sus elementos y trazar la gráfica.

$$(16x^2-96x)-(25y^2-50y)=-119$$
$$16(x^2-6x)-25(y^2-2y)=-119$$
$$16(x^2-6x+9)-25(y^2-2y+1)=-119+144-25$$

$16(x-3)^2-25(y-1)^2=0$ Dado que el resultado es igual a cero, no es posible realizar el paso siguiente (la división entre cero no está definida).

Ahora bien, la expresión anterior corresponde a una diferencia de cuadrados, la cual se puede factorizar en:

$\left[4(x-3)-5(y-1)\right]\left[4(x-3)+5(y-1)\right]=0$, o, simplificando:
$(4x-5y-7)(4x+5y-17)=0$; dado que cuando ab = 0 se cumple que a = 0 o b = 0, se tiene:

$4x-5y-7=0$ o $4x+5y-17=0$, que corresponden a las ecuaciones de dos rectas que se cortan en el punto de coordenadas (3, 1). El estudiante puede verificar esta última aseveración recurriendo a los métodos estudiados en el curso de álgebra.

EJERCICIOS:

Para cada una de las siguientes ecuaciones que representan hipérboles, se pide dibujarlas, determinando además los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

7.5 $16x^2 - 25y^2 = 100$.

7.6 $9x^2 - 4y^2 = 36$.

7.7 $4x^2 - y^2 = 16$.

7.8 $x^2 - 9y^2 = 18$.

7.9 $4y^2 - x^2 = 8$.

7.10 $4y^2 - 9x^2 = 36$.

Las órbitas de algunos cometas son hipérbolas. Estos cometas sólo se acercan una vez al Sol, que es uno de los focos de su trayectoria. Después se alejarán perdiéndose en los confines del Sistema Solar.

En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas. Trace su gráfica y las asíntotas.

7.11 Centro en (0, 0); vértice en (3, 0); foco en (5, 0).

7.12 Centro en (0, 0); vértice en (-1, 0); foco en (-3, 0).

7.13 Centro en (0, 0); vértice en (0, -1); foco en (0, -3).

17.14 Centro en (0, 0); vértice en (0, 3); foco en (0, 5).

17.15 $V_1(-3, 2)$, $V_2(-3, -2)$; 2b = 6.

17.16 F(-7, 3), F'(-1, 3); 2a = 4.

17.17 $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$; asíntota la recta y = 2x.

Las hipérbolas aparecen en muchas situaciones reales, por ejemplo, un avión que vuela a velocidad supersónica paralelamente a la superficie de la tierra, deja una huella acústica hiperbólica sobre la superficie. La intersección de una pared y el cono de luz que emana de una lámpara de mesa con pantalla troncocónica, es una hipérbola.

En cada uno de los ejercicios siguientes encuentre el centro, los focos, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas de cada hipérbola. Trace la gráfica correspondiente.

7.18. $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

7.19 $\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

7.20 $(x+5)^2 - 4(y-4)^2 = 16$

7.21 $9(x-3)^2 - (y+2)^2 = 18$

7.22 $x^2 + 4x - 4y^2 - 8y + 4 = 0$

7.23 $3y^2 - x^2 - 12y + 9 = 0$

7.24 $9x^2 + 18x - 4y^2 - 8y - 23 = 0$

7.25 $y^2 - 4x^2 - 8x - 6y = 9$

7.26 $x^2 - 2x + 1 - 25y^2 = 25$

7.27 $x^2 - 9y^2 + 6x - 18y = -9$