Al concluir la unidad, el alumno conocerá y aplicará las propiedades relacionadas con el lugar geométrico llamado circunferencia, determinando los distintos parámetros , su ecuación respectiva y viceversa.

4.1.- Obtención de la ecuación de la circunferencia

DEFINICION y ECUACION.- La circunferencia es el lugar geométrico del conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo, llamado centro. A la distancia fija de cualquier punto de la circunferencia al centro se le denomina radio (***r***).

$$R = \{(x, y) \mid \overline{PC} = r\}$$

Si en la figura 1, se considera el centro C(h, k) fijo (de coordenadas constantes) y el punto P(x, y) que gira alrededor de C, conservando la distancia r constante, se tiene la gráfica de la circunferencia.

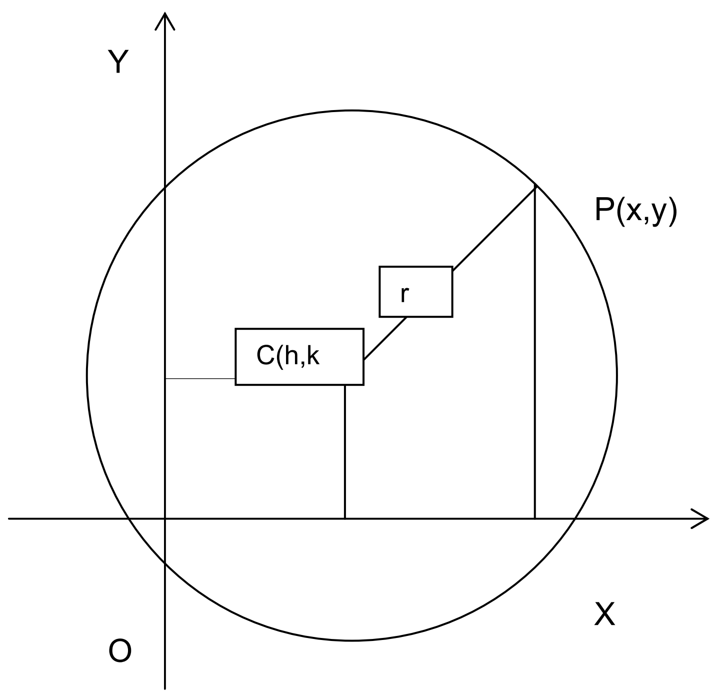

Fig. 1

Aplicando la fórmula para la distancia entre dos puntos se obtiene:

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Elevando al cuadrado ambos miembros

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ (Ecuación de la circunferencia en forma ordinaria (1)

Desarrollando los binomios al cuadrado y ordenando términos, se obtiene:

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

Se observa que los términos cuadráticos tienen el mismo coeficiente; condición que caracteriza a la ecuación de la circunferencia.

Si se hace: $-2h = D$, $-2k = E$, y $h^2 + k^2 - r^2 = F$, se obtiene una nueva forma de la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

A esta ecuación se le llama **forma general de la circunferencia**.

Para utilizar la ecuación (1) se puede observar que se requiere conocer los valores de las coordenadas del centro y la longitud del radio.

4.1.1 **Ecuación de la circunferencia con centro en el origen**.

Si ***h = k = 0***, es decir, cuando el centro de la circunferencia está en el origen de coordenadas (Figura 2), al sustituir en (1) se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1\ A)$$

Que es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen.

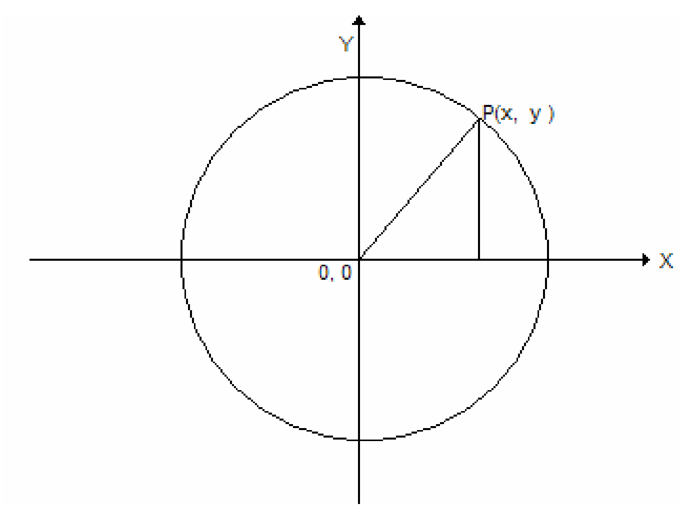

Fig.2

EJEMPLO 1.4

Escriba la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el origen y que pasa por el punto A(6, 8).

Solución

Se conocen las coordenadas del centro, pero no el radio, por lo tanto, de la ecuación (1A):

$x^2 + y^2 = r^2$, sustituyendo *(x,y)*

$(6)^2 + (-8)^2 = r^2$, luego

$r^2 = 100$, extrayendo la raíz cuadrada se obtiene

$r = 10$.

Por lo tanto la ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 = (10)^2 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 100$$

4.1.2 **Ecuación de la circunferencia con centro en cualquier punto**.

La ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(h, k) y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

EJEMPLO 2.4:

Escriba la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en C (3, 5) y su radio es igual a 8.

Solución.

Datos h = 3; k = 5 r = 8
Utilizando la ecuación (1)

$(x – 3)^2 + (y – 5)^2 = 64$ (*forma ordinaria*)

Desarrollando los binomios y simplificando, después de ordenar, se obtiene:

$x^2 + y^2 – 6x – 10y – 30 = 0$ (*forma general*)

En donde: D = –6, E = –10, F = –30

EJEMPLO 3.4: Escribir la ecuación de la circunferencia con centro en el punto de coordenadas C(-3, -2) y radio igual a 5.

Solución:
Utilizando la ecuación (1)

$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad (\textit{forma ordinaria})$$

Quitando paréntesis y reduciendo queda:

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0 \quad (\textit{forma general})$$

En este ejemplo:

D = 6, E = 4, F = -12.

CIRCUNFERENCIA DETERMINADA POR TRES CONDICIONES.- Examinando las ecuaciones (1) y (2), vemos que ambas contienen tres constantes arbitrarias o parámetros, que podrán calcularse en cada caso, si podemos establecer tres ecuaciones que liguen esos parámetros: h, k, r**,** o bien D**,** E, F.

EJEMPLO 4.4: Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5, -1), (4, 6) y (-2,-2).

Solución: Para resolver este problema, se puede utilizar cualquiera de las dos formas de la ecuación de la circunferencia.

Si utilizamos la ecuación (2):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2).$$

Como las coordenadas de cada uno de los puntos deben satisfacer la ecuación (2), haciendo las sustituciones obtenemos:

Para P1 (5,-1): $25 + 1 + 5D - E + F = 0$
Para P2 (4, 6): $16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$
Para P3 (-2,-2): $4 + 4 - 2D - 2E + F = 0$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones obtenemos:

D = -2, E = -4, F = - 20.

Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos la ecuación de la circunferencia que se pide:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

Nota: Si la ecuación anterior escrita en forma general, se desea pasar a su forma

ordinaria, se procede de la siguiente manera:
a).- Se agrupan los términos que contiene a la misma variable (x,y).
b).- Se despeja el termino independiente.
c).- De las agrupaciones se completa el trinomio cuadrado perfecto, y para no alterar la igualdad, se suman las mismas cantidades en el segundo miembro de la misma.
d).- Factorizar los trinomios cuadrados perfectos correspondientes, obteniendo como resultado, la ecuación en forma ordinaria.

Como tarea extra clase se deja al alumno calcular las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

Sol. C(1,2) r = 5

4.2.- **Problemas que involucren recta y circunferencia**
Se pueden tener cuatro casos principales:
4.2.1.- La recta pase por el centro de la circunferencia
4.2.2.- La recta pasa por dos puntos de la circunferencia
4.2.3.- La recta sea tangente a la circunferencia
4.2.4.- La recta dista de la circunferencia

4.2.1 La recta pase por el centro de la circunferencia
EJEMPLO 5.4: Escribir la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0, 1) Y (3, 4), que tiene su centro en la recta y = x + 4.

Usamos la ecuación ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Las coordenadas del punto (0. 1) deben satisfacer la ecuación:

$$(0 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$$

Las coordenadas del punto (3, 4) deben satisfacer la ecuación:

$$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$$

Como el centro C(h, k) es un punto que pertenece a la recta, y = x + 4 debe satisfacer su ecuación:

$$y = x + 4$$

$$k = h + 4 \qquad (2)$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones:

$$(0 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$$
$$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$$
$$k = h + 4$$

obtenemos los valores siguientes:

$$h = 0, \quad k = 4, \quad r = 3.$$

Por lo tanto la ecuación pedida es:

$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$$

4.2.2 La recta pasa por dos puntos de la circunferencia

INTERSECCION DE RECTA Y CIRCUNFERENCIA.- Para encontrar los puntos donde una recta, corta a una circunferencia dada por su ecuación (1) o (2), hemos de resolver el sistema formado por la ecuación de la recta dada y la ecuación de la circunferencia. En general, hay dos soluciones (un par de valores de x, un par de valores de y) que verifican el sistema formado por ambas ecuaciones, lo que significa que generalmente la recta corta a la circunferencia en dos puntos. fig. 3

EJEMPLO 6.4: Encontrar los puntos donde la recta $y = x + 3$ corta a la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0.$$

Solución: Escribamos el sistema

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$y = x + 3 \qquad \text{(b)}$$

Elevando al cuadrado (b) y sustituyendo en (a), queda:

$$x^2 + (x + 3)^2 - 4x - 8(x + 3) - 16 = 0$$

Simplificando y resolviendo la ecuación resultante, obtenemos para las variables (x, y) los valores de cada una, que son:

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{71}}{4} \qquad y_1 = \frac{18 + 2\sqrt{71}}{4}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{71}}{4} \qquad y_2 = \frac{18 - +2\sqrt{71}}{4}$$

Es decir, los puntos $P1(x_1, y_1)$ y $P2(x_2, y_2)$, con los valores anotados, son los puntos donde la recta y la circunferencia se cortan (figura 3).

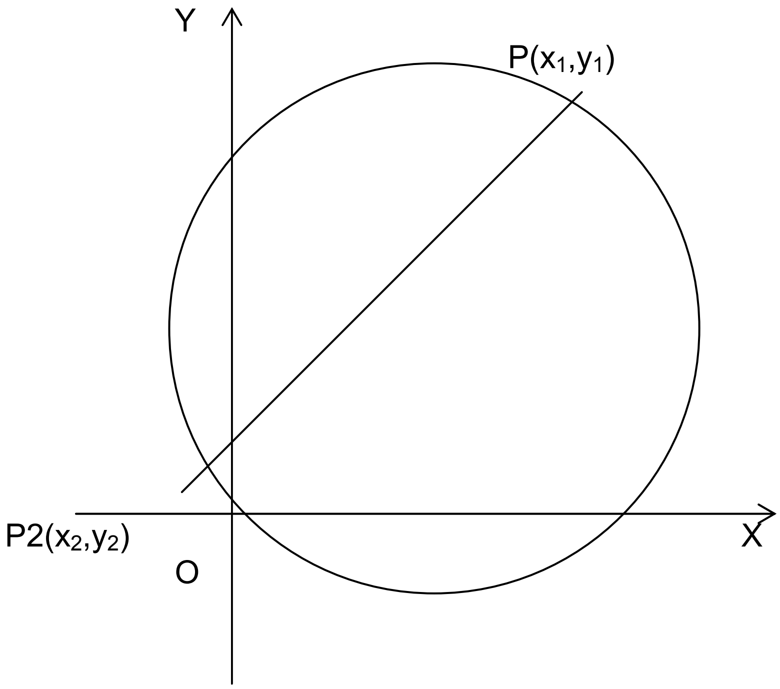

Fig 3

4.2.3.- La recta es tangente a la circunferencia

EJEMPLO 7.4: Encuentre los puntos donde la recta y = 2x - 10 corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 20$.

Solución: Resolvemos el sistema:

$$x^2 + y^2 = 20 \qquad (1)$$
$$y = 2x - 10 \qquad (2)$$

Haciendo $y^2 = (2x - 10)^2$ y sustituyendo en (1) nos queda'
que da para x los valores:

$$x^2 + (2x - 10)^2 = 20$$

Resolviendo $x = 4$

Un solo valor. Y como consecuencia, y = -2; en este caso la recta resulta ser tangente a la circunferencia dada como se ilustra en la (figura 5).

En general para encontrar las ecuaciones de las tangentes a una circunferencia dada, sujeta a cumplir determinadas condiciones, hemos de encontrar entre las rectas que la cumplan, aquellas cuyas intersecciones con la circunferencia sean un solo punto.

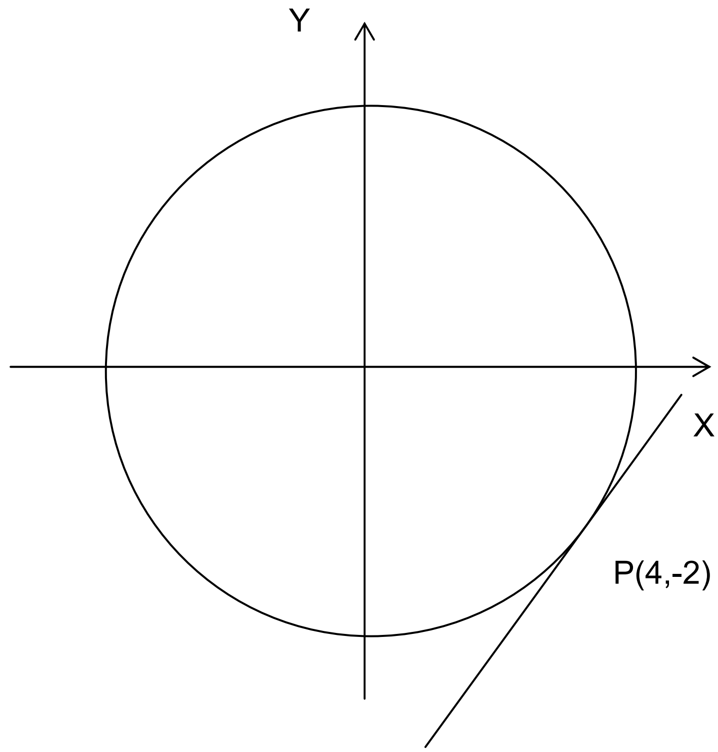

fig.5

EJEMPLO 8.4: Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en C(2, 3) y que es tangente a la recta la recta x – y – 4 = 0.

Solución: La distancia de la recta al punto C centro de la circunferencia es el radio. Se encuentra por la formula:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En la ecuación de la recta A = 1, B = 1, C = -4, y del centro de la circunferencia x = 2 , y = 3, substituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$r = d = \frac{1(2) + 1(-3) + (-4)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{por lo tanto} \quad r^2 = \frac{25}{2}$$

Substituyendo los valores en la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen se tiene:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2 = \frac{25}{2} \qquad \text{Desarrollando}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 1 = 0$$

EJEMPLO 9.4: Encontrar la ecuación de la tangente a la circunferencia, $x^2 + y^2 = 20$, y que sea paralela a la recta y = 2x + 6.

Las coordenadas del punto de contacto satisfacen el sistema:

$$x^2 + y^2 = 20 \qquad (1)$$

$$y = 2x + b \qquad (2)$$

Donde (b) es un parámetro cuyo valor se determina al resolver el sistema (1), (2), sustituyendo (2) en (1)

$$x^2 + (2x+b)^2 - 20 = 0$$

$$5x^2 + 4xb + b2 - 20 = 0$$

$$x = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4*5*(b^2 - 20)}}{2*5}$$

Para que la recta sea tangente se necesita que el valor de (x) sea único; para esto es suficiente que el radicando sea Igual a cero

$$-4b^2 + 400 = 0 \qquad b = 10$$

Condición que indica que y = 2x + 10, y = 2x - 10 son las rectas que satisfacen lo exigido. Es decir que este par de rectas son tangentes a la circunferencia y además paralelas a la recta dada.
Se deja como trabajo extra clase hacer la grafica correspondiente de circunferencia y rectas.

4.2.4.- La recta dista de la circunferencia

EJEMPLO 10.4: Encontrar los puntos donde la recta y = x - 3 corta a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 +4x - 8y + 11 = 0$.

$$y = x - 3$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0.$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones, como en el caso anterior, nos resulta:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Nota: Valores imaginarios para (x) que consecuentemente producirán valores imaginarios también para (y). Esto quien decir que la recta no corta a la circunferencia o bien, la corta en dos puntos imaginarios: fig 4).

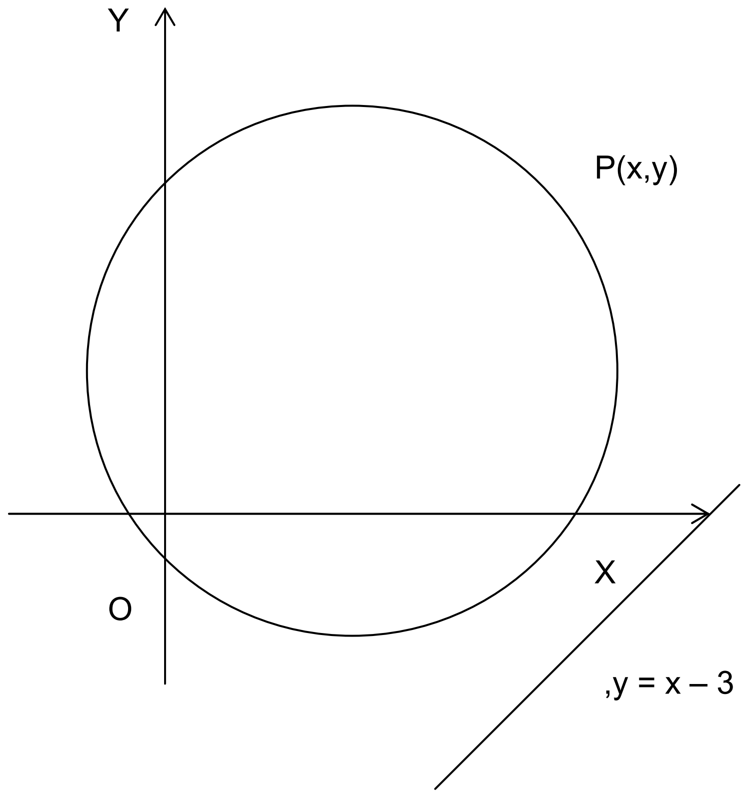

fig.4

CONDICION DE TANGENCIA.- Encontrar la condición de tangencia para que la recta y = mx + b sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ (cuyo centro es el origen).

Hemos de resolver el sistema:

$$y = mx + b \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)$$

El valor de (y) se sustituye en (2)

$$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$$

$$(1+m^2)x^2+2bmx+b^2-r^2=0$$

$$x = \frac{-bm \pm \sqrt{r^2(1+m^2)-b^2}}{(1+m^2)}$$

Los valores de (x) pueden ser reales o imaginarios, según sea el signo del radicando. Se presentan los tres casos siguientes:

1). $(1 + m^2)r^2 - b^2 > 0$, raíces reales y desiguales. La recta corta a la circunferencia en dos puntos

2). $(1 + m^2)r^2 - b^2 = 0$, raíces reales e iguales. La recta es tangente a la circunferencia

3). $(1 + m^2)r^2 - b^2 < 0$, raíces imaginarias. La recta dista de la circunferencia

Nos interesa el caso 2), que expresa la condición necesaria y suficiente para que la recta (1) sea tangente a la circunferencia (2). Por lo tanto tenemos:

$(1 + m^2)r^2 - b^2 = 0$

$(1 + m^2)r^2 = b^2$

$$b = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Este valor de (b) sustituido en (1) nos da la ecuación de las tangentes que son:

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2} \qquad (3)$$

El alumno calculara las coordenadas de los puntos de contacto (siendo uno para cada tangente) :

El cociente $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{1}{m}$ es la pendiente del radio del punto de contacto. Lo que nos indica (puesto que es la pendiente de la tangente) que la tangente a la circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Si admitimos este resultado, demostrado antes en la geometría elemental, es más fácil encontrar la condición para que la recta (1) sea tangente a la circunferencia (2):

$$y = mx + b \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)$$

Para que la recta (1) sea tangente a la circunferencia (2) es necesario y suficiente que el centro (0, 0) de la circunferencia se encuentre a la distancia (r,) de la recta. Ahora bien, la distancia del origen (0, 0) a la recta (1) es:

$$r = \pm \frac{b}{\sqrt{1 + m^2}}$$

$$b = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Sustituyendo estos valores de (b) en (1) obtenemos, el mismo resultado al que se llegó anteriormente:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (3)$$

El mismo razonamiento se hace si la circunferencia tiene su centro en el punto (h, k), siendo entonces su ecuación:

$r = \dfrac{k - mh - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$ por lo tanto $b = k - mhr\sqrt{1+m^2}$

Estos valores de (b) sustituidos en (1), nos dan:

$$y - k = m(x-h) \pm r\sqrt{1+m^2} \qquad (4)$$

Tanto en (3) como en (4) tenemos familias de rectas tangentes a la circunferencia (1), que depende del parámetro (m), porque suponemos que h, k, r tienen valores fijos: (3) y (4) son las tangentes de pendientes (m), o paralelas a la recta (1). Hay dos tangentes para cada valor del parámetro (m).

EJEMPLO 11.4: Encontrar las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ cuya pendiente es m = 3/4

Usamos la ecuación (3) con m = 3/4, r = 5:

$$y = \frac{3}{4}x \pm 5\sqrt{1+\frac{9}{16}}$$
$$y = \frac{3}{4}x \pm \frac{25}{4}$$
$$4y - 3x = \pm 25$$

Del resultado obtenido se observa que hay dos tangentes: $4y - 3x = 25$ y $4y - 3x = -25$ que satisfacen la condición dada.

Se deja al alumno como ejercicio calcular los puntos de tangencia.

EJEMPLO 12.4: Encontrar las tangentes a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, que son paralelas a la recta y = 3x – 1 (2).

Como la ecuación de la recta esta dada en la forma y = mx + b se tiene que m = 3

Usamos la ecuación (4) con m = 3, r = 2, h = 1, k = -2:

$$y + 2 = 3(x-1) \pm 2\sqrt{10}$$
$$y = 3x - 5 \pm 2\sqrt{10}$$

Se deja al alumno como ejercicio

a) Calcular las coordenadas de los puntos de contacto. b) Trazar la gráfica.

EJEMPLO 12.4: Desde el punto $(0, 2\sqrt{2})$ trazar dos tangentes a la circunferencia cuyo centro es el origen y su radio mide 2. Escribir las ecuaciones de esas tangentes y obtener las coordenadas de los puntos de contacto.

En este ejemplo debemos usar r = 2, para calcular (m) por la condición de que el punto dado (0, $2\sqrt{2}$) pertenezca a las tangentes.

Sustituyendo sus coordenadas en (3), obtenemos:

$$2\sqrt{2} = \pm 2\sqrt{1+m^2}$$
$$2 = 1 + m^2$$
$$m = \pm 1$$

Estos valores de (m) se sustituyen en (3):

$$y = \pm x \pm 2\sqrt{2}$$

Observamos, por la condición dada en el problema, que solo se puede emplear el signo + en el segundo termino del segundo miembro porque las tangentes se apoyan en el punto $(0, 2\sqrt{2})$ y no en el punto (0, $-2\sqrt{2}$). De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = \pm x + 2\sqrt{2} \qquad \textit{(a)}$$

Los puntos de contacto son:

$$x_1 = \frac{rm}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{2}} = \pm 2$$
$$y_1 = \frac{\pm r}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{2}} = \pm 2$$

Encontramos cuatro puntos; pero solo $(-\sqrt{2},, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{2}.)$ satisfacen las ecuaciones *(a).* El primer punto pertenece a la circunferencia dada y a la tangente cuya pendiente es (m = +1), mientras que el segundo es el punto de contacto de la tangente cuya pendiente (m = -1).

4.3 **Calculo de los parámetros de la circunferencia dada su ecuación en forma general**

Teniendo la ecuación de la circunferencia en la forma general, una las formas ya establecidas, se debe identificar de la misma, los elementos: radio y coordenadas del centro.

Para este fin, usaremos el método de completar cuadrados, partiendo de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

Si en el primer miembro de la ecuación, separamos por grupos la (x) y la (y), agregamos los valores necesarios para formar cuadrados perfectos, sumamos en el segundo miembro los valores añadidos en el primero:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(D^2 + E^2 - 4F\right)$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F)$$

La ecuación anterior corresponde con la forma ordinaria de la circunferencia, en la cual se expresa que un punto cualquiera de la circunferencia permanece a la distancia:

$$\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \quad \text{Del punto fijo} \quad \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

Es decir, tenemos la ecuación de una circunferencia cuyo centro es el punto $C(h,k) = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y su radio r = $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

4.4.- Condiciones para que una ecuación del tipo Ax^{2,}+,Bxy,+,Cy^{2,}+,Dx,+,Ey,+,F= 0 sea una circunferencia.

Sabemos que $$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Analizando la expresión que nos da la longitud del radio, podemos observar que se presentan tres casos:

4.4.1.- La ecuación representa una circunferencia real

1°.- Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, el radical tiene un valor real y tenemos una circunferencia real.

4.4.2.- La ecuación representa un punto

2°.- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces r = 0 y tenemos una circunferencia, que se reduce a un solo punto: su centro.

4.4.3.- La ecuación no tiene una representación en el plano (circunferencia imaginaria)

3°.- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, el radical tiene un valor imaginario y no hay realmente circunferencia. Decimos en este caso que se trata de una circunferencia imaginaria.

Sabemos que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F + Bxy = 0$ con A y C ≠ 0, B = 0, se reduce a la forma (2), después de dividir ambos miembros entre (A) y cambiar D´ = D/A, E' = E/A y F´ = F/A. Por lo tanto: TODA ECUACION DE SEGUNDO GRADO EN (x, y), SIN EL TERMINO (xy), DONDE LOS COEFICIENTES DE x^2, y^2 SEAN IGUALES, REPRESENTA UNA CIRCUNFERENCIA, UN PUNTO O UN LUGAR GEOMETRICO IMAGINARIO.

EJEMPLO 14.4: Encontrar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$

Solución: D = - 8, E= - 14 F = 40 por lo tanto $D^2 = 64$, $E^2 = 196$ 4F= 160

$D^2 + E^2 - 4F > 0$

64 + 196 – 160 = 100 > 0 por lo tanto es una circunferencia real, cuya ecuación es:

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 14y + 49) = 16 + 49 – 40$

$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

De donde: h = 4, k = 7

Coordenadas del centro C(4,7) radio r = 5

EJEMPLO 15.4: Encontrar las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia cuya ecuación es: $5x^2 + 5y^2 - 6x + 8y - 10 = 0$.

El coeficiente de x^2 y el de y^2 son iguales (5); Por lo tanto probablemente es una circunferencia

Solución:

Dividiendo la ecuación entre (5)

$$x^2 + y^2 - \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y = 2$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} + y^2 + \frac{8}{5}y + \frac{16}{25} = 2 + \frac{9}{25} + \frac{16}{25}$$

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{5}\right)^2 = 3$$

De donde:

h = 3/5 , k = -4/5 r = $\sqrt{3}$ '

Coordenadas del centro C(3/5, - 4/5) radio r = $\sqrt{3}$

EJEMPLO 16.4 Dada la ecuación que se indica determinar cual es su lugar geométrico.
$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 32 = 0$
Solución: D = - 8, E= - 8 F = 32 por lo tanto $D^2 = 64$, $E^2 = 64$ 4F= 128
$D^2 + E^2 - 4F > 0$
64 + 64 – 128 = 0 = 0 por lo tanto es una circunferencia que se reduce a UN PUNTO, cuya ecuación es:
$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 8y + 16) = 16 + 16 - 32$
$(x - 4)^2 + (Y - 4)^2 = 0$
De donde: h = 4, k = 4
Coordenadas del centro C(4,4) radio r = 0

EJEMPLO 17.4 Dada la ecuación que se indica determinar cual es su lugar geométrico.
$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
Solución: D = -6, E= - 8 F = 40 por lo tanto $D^2 = 36$, $E^2 = 64$ 4F= 160
$D^2 + E^2 - 4F > 0$

36 + 64 – 160 = -60 < 0 **La ecuación no tiene una representación en el plano (circunferencia imaginaria)**

Tema adicional al programa.
Para complementar el estudio de la circunferencia, dejándolo como tema opcional se analiza el caso cuando dos circunferencias se grafican en el mismo plano:

5.- INTERSECCION ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS.- Para encontrar los puntos donde dos circunferencias se cortan, hemos de resolver el sistema formado por sus ecuaciones.

Observamos que restando las ecuaciones :
$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Resulta:
$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \qquad \text{(b)}$$
Ecuación que representa una línea recta, llamada eje radical, que contiene los puntos de intersección de las dos circunferencias (a), porque los valores de las variables (x, y) que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (a), satisfacen también la ecuación (b), ya que esta se obtuvo de las dos primeras.

En resumen: Para encontrar los puntos donde se cortan las dos circunferencias (a), es suficiente resolver el sistema formado por la ecuación (b) y una de las ecuaciones (a).

EJEMPLO18.4: Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias que tienen por ecuaciones

$x^2 + y^2 = 10$

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ (a)

Restando la segunda de la primera obtenemos:

$6x + 6y = 24$

$x + y = 4$ (eje radical) ... (b)

Resolviendo la ecuación (b) con la primera de las ecuaciones (a), obtenemos:

$x^2 + (4 - x)^2 = 10$

$x_1 = 1;$ $y_1 = 3$
$x_2 = 3$ $y_2 = 1$

Vemos que los puntos (1, 3) Y (3, 1) donde el eje radical corta a la primera circunferencia (la que tiene su centro en el origen), son los mismos puntos donde las circunferencias se cortan (fig 6)

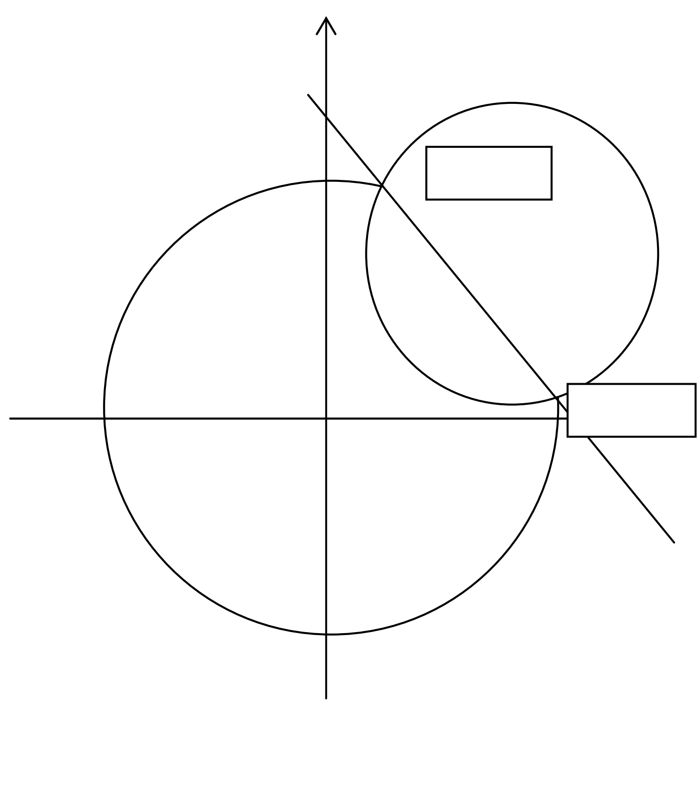

fig.6

EJEMPLO 19.4: Encontrar los puntos de intersección de las dos circunferencias que tienen por ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y = 4 - 16\sqrt{2}$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

Restando estas dos ecuaciones:

$$-8x - 8y = -16\sqrt{2}$$

Esta última es la ecuación del eje radical, cuya intersección con ambas circunferencias se reduce a un solo punto: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ (figura 7). Y se observa que las circunferencias son tangentes entre sí.

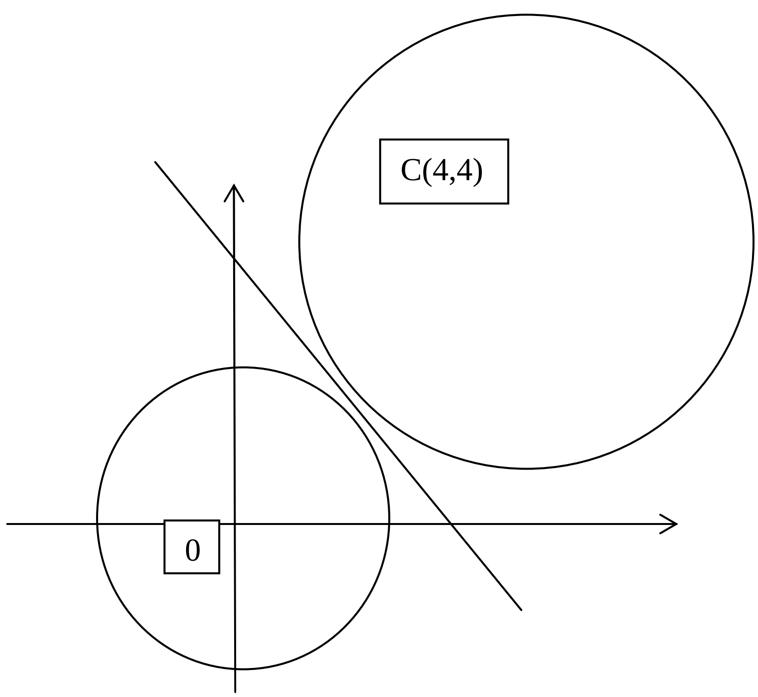

fig.7

EJEMPLO 20.4: Encontrar los puntos donde se cortan las circunferencias:

$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$ (a)
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$

Respuesta: La ecuación del eje radical es:

$10x + 10y = 15$

$2x + 2y = 3$

Resolviendo en forma similar a los ejemplos anteriores, se encontrará que este eje radical no corta a las circunferencias en ningún punto del plano real, ya que las raíces son imaginarias.; lo que significa que las circunferencias no se cortan, como se ve en la figura 8.

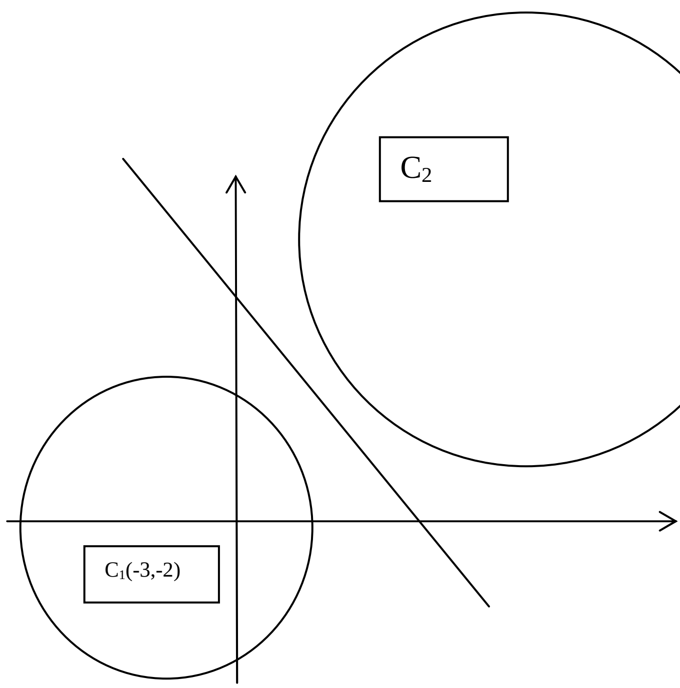

fig.8

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular la ecuación de cada una de las circunferencias y graficar si los datos son:

4-1.- Tiene por centro el origen y pasa por el punto (-3, 4) Sol $x^2 + y^2 = 25$

4-2.- Tiene por centro el origen y pasa por el punto (6, 8) Sol $x^2 + y^2 = 100$

4-3 Tiene por centro el origen y pasa por el punto (7, 4) Sol $x^2 + y^2 = 65$

4-4.- Tiene por centro el punto (-3, 4) y es tangente al eje y'y.

Sol. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

4-5 Tiene por centro el punto (3, -4) y es tangente al eje y'y.

Sol. $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 36 = 0$

4-6 Pasa por los puntos (0, 1), (-1,2) Y (-4, -1).

Encontrar las coordenadas del centro, graficar las circunferencias que siguen, después de encontrar las coordenadas del centro y el radio.

4-9 $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ Sol $h = -1.5$ $k = 2.5$ $r^2 = 5$

4-10 $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 4 = 0$ Sol $h = 1$ $k = 2$ $r^2 = 4$

4-11 $5x^2 + 5y^2 + 10x + 10y + 5 = 0$ Sol $h = -1$ $k = 1$ $r^2 = 1$

4-12 $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 5 = 0$

4-13 $5X^2 + 5y^2 - 3x - 4y + 1 = 0$

Encontrar las coordenadas del centro y el radio y graficar la circunferencia que cumple las siguientes condiciones y encontrar su ecuación:

4-14 Pasa por los puntos A(-5,-1), B(4, 6) y C(-2, -2) Sol $h = -2$ $k = -1$ $r^2 = 25$

4-15 Pasa por los puntos A(0, 5), B(5, 0) y C(-5, 0) Sol $h = 0$ $k = 0$ $r^2 = 25$

4-16 Pasa por los puntos A(1, 6), B(-3, 6) y C(-5, -0) Sol $h = -2$ $k = 1$ $r^2 = 20$

4-17 Pasa por los puntos (1, -1) Y (-5, 2), Y tiene su centro sobre la recta $x - y + 7 = 0$.

4-18 Tangente a los dos ejes y pasa por el punto (4, 3).