UNIDAD TRES FAMILIA DE RECTAS

Familia de línea recta: La ecuación de la recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones independientes, por ejemplo, dos de sus puntos ó uno de sus puntos y su pendiente.

Una recta cumple solo una condición, no es una recta única, por lo que existe una infinidad de rectas que satisfacen dicha condición y tiene una propiedad en común.

Por lo tanto la totalidad de las rectas que cumplen con una única condición geométrica se denominan "familia de rectas".

Si consideramos a todas las rectas cuya pendiente es 7, la totalidad de ellas forman una familia de rectas paralelas y que tienen como propiedad común que su pendiente es 7.

Al aplicar la ecuación pendiente y ordenada en el origen se tiene lo siguiente:

$$Y=mx+b$$
$$Y=7x+b$$
$$Y=7x+k$$

K= constante arbitraria que se le asigna cualquier valor real. En la ecuación k representa el segmento que la recta determina sobre el eje "y".

Al tomar "k" un valor particular se obtiene la ecuación de las rectas que forman una familia; por ejemplo: determinar las familias de rectas que es (0, 2) y (-3) despectivamente.

$$Y=7x+k$$
$$Y=7x+0$$
$$7x-y=0$$

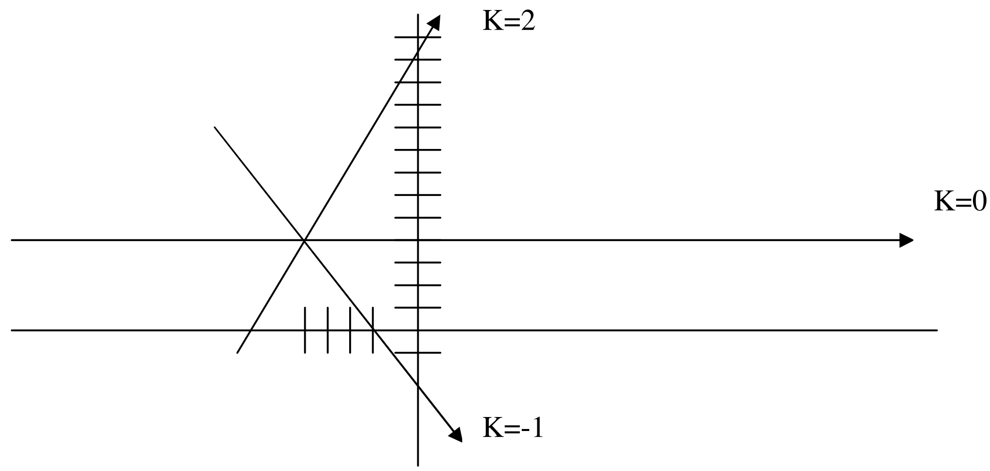
Si consideramos todas las rectas que pasan por el punto A (-4, 3), si se aplica la ecuación punto y pendiente de la recta tenemos:

A (-4, 3)

$$y-y1=m(x-x1)$$
$$Y-y1=k\ (\&-\&1)$$
$$Y-3=k(x-(-4))$$
$$Y-3=k\ (\&+4)$$

Al tomar k un valor particular se obtiene la ecuación de cualquiera de las rectas que forma la familia; por ejemplo: determina las familias par cuando k=0, 2 y -1 de acuerdo al punto A y -1.

Para k=0	para k=2	para k=-1
Y-y1=k(x-x1)	y-y1=2(x-x1)	y-y1=-1(x-x1)
Y-3=0(x-(-4))	y-3=2(x+4)	y-3=-1(x+4)
Y-3=0	y-3=2x+8	y-3=-x-4
y=3	2x-y+3+8=0	y-3+x+4=0
	2x-y+11=0	**x+y+1=0**
	-y=-2x-11	**y=-x-1**
	y=2x+11	



La familia de rectas obtenidas se le conoce también como **HAZ** de rectas de un vértice dado.

Por todo lo anterior se observa que una recta de una familia de rectas queda determinada al asignarse un valor especifico a la constante "k" que se denomina parámetro de la familia.

La definición de familia es útil para hallar la ecuación de una recta en particular, el proceso consta de dos pasos.

1.- Se aplica la forma de la ecuación que satisfaga la condición dada desinhibiendo la familia ó HAZ de recta.
2.-dada otra condición se determina el valor del parámetro de la familia.

Ejemplo: hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto a (-3, 5) tal que la suma algebraica de los segmentos que determinan sobre los ejes coordenados es=4.

Solución: al aplicar forma cinética.

X/a+y/b=1 x/k+y/4-k=1 donde ((k no es =4)

Como la recta pasa por el punto A (-3, 5)

-37k+5/4-k=-3(4-k)+5k/k (4-k)=1

-3(4-k)+5k= (1) (k(4-k))

$-12+3y+5k=4k-k^2$

$-12+8k=4k-k^2$ $Ax^2+Bx+C=0$ Ecuación de 2° grado

$K^2+8k-4k-12=0$

$K^2+4k-12=0$

Al resolver la ecuación de 2° grado se obtiene el valor de k

X=-b+-raíz de b^2-4ac/2ª

X=-4raízde $(4)^2$-4(1)(-12)/2(1) A=1

X=-4raíz de 16+48/2 B=4

X=-4 raíz de 64/2 C=-12

X=-4+8/2=4/2=**x=2**

X=-b+-raíz de b^2-4ac/2ª

X=-4-raíz de $(4)^2$-4(1)(-12)/2(1)

X=-4-raíz de 16+48/2

X=-4- raíz de 64/2

X=-4-8/2=-12/2=**x=-6**

K1=2 k2=-6 k1+k2=-4

Si se substituyendo la ecuación original obtenemos la ecuación de la recta

Para k=2	para k=-6
x/k+y/4-k=1	x/k+y/4-k
x/2+y/4-2=1	x/-6+y/4-(-6)
x/2+y/2=1	x/-6+y/10=-10x+6y/-60=1
x+y/2=1	-10x+6y=-60

x+y=2	-10x+6y+60=0(-1)
x+y-2=0	10x-6y-60=0
	5x-3y-30=0

Se determina que las 2 rectas que tienen la propiedad de pasar por el punto A (-3, 5) y que satisface la condición dada de que la suma algebraica de los segmentos L, K que determinan los ejes coordenados es = **-4**

Determina la familia de las rectas cuando k=0, 1, 2, 3, 4, -1 y -2 de acuerdo al punto
A (-4, 3)

Y-y1=k(x-x1)
Y-3=0(x-(-4))
Y-3=0
y=3

Y-y1=k(x-x1)
Y-3=0(x-(-4))
Y-3=1(x+4)
Y-3=x+4
Y-3-x-4=0
x-y+7=0
y=x+7

Familia de rectas que pasan por la intersección de 2 rectas dadas

Sea Ax+By+C=0 y Ax1+By1+C1=0

Dos rectas que se cortan en el punto B1(x1y1)se considera la expresión siguiente k1(Ax+By+C)+k2(Ax+By+C)=0

K=m	En donde k1 y k2 son arbitrarias a las que se les asigna cualquier
Pendiente=0°	valor real excepto en el caso donde las dos sean cero a la vez es
	decir que al multiplicarlo por cualquier ecuación es cero.

La ecuación anterior se considera que k2/k1=k al sustituir en la ecuación en la recta resulta: Ax+By+C+K(Ax+By+C)=0

La ecuación general que representa la familia de las rectas que pasan por la intersección de las rectas presentan la ventaja de obtener la ecuación de lacta sin determinar el punto de intersección.

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas 3x+y-16 de la recta y 4x-7y-13=0 y por el punto p(-2,4)

P(-2, 4)	Ax+By+C+K(Ax+By+C)=0	
	3x-y-16+k(4x+7y-13)=0	**k=18/-49**
	3(-2)+4-16+k(4(-2)-7(4)-13)=0	

-6+4-16+k(-8-28-13)=0
-18+k(-49=0
-18-49k=0
-49k=18

La recta o ecuación pedida es k=-18/49

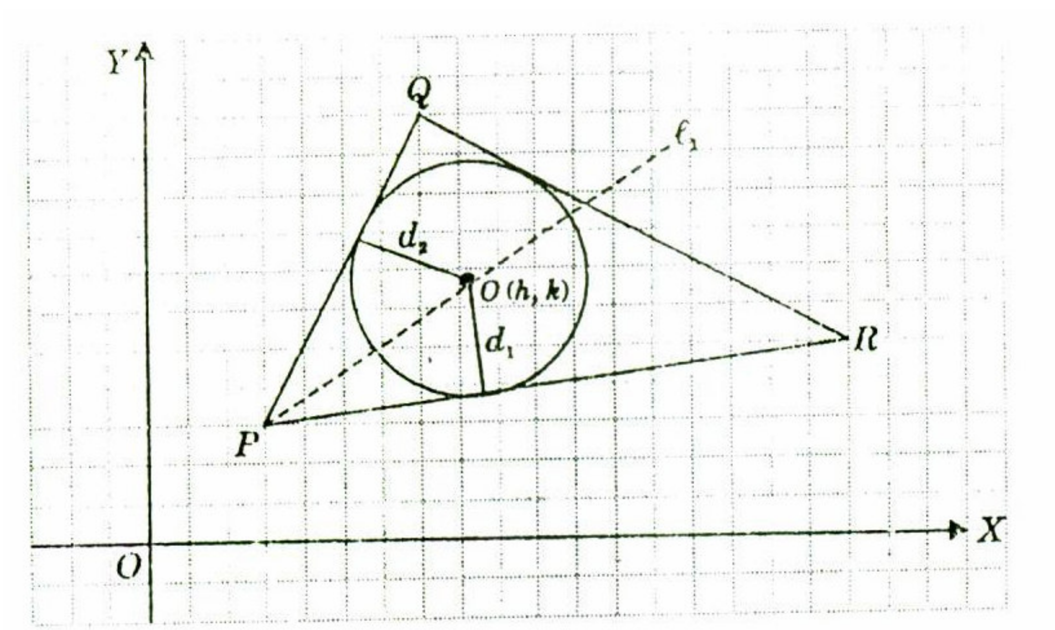
3x+y-16+[k(4x-7y-13)]=0
3x+y-16+[-18/49(4x-7y-13)]=0
3x+y-16-[18/49(4x-7y-13)]=0
3x+y1-16-12x-126y-243/49=0
147x+49y-789-72x-126y-239/49=0
147x-72x+49y+126y-789+234/49=0
15x+175y-550/49=0
1.53x+351y-11.22=0

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIANGULO

Geométricamente el punto de concurrencia de las bisectrices es el insentro; el de las mediatrices es el circuncentro; el de las alturas es el hortosentro y el de las medidas es el grabicentro.

Ecuación como lugar geométrico de la bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta interior del ángulo, que lo divide en dos partes o ángulos iguales, es decir, es el lugar geométrico equidistante en los lados del ángulo.



Sean las rectas PQ: Ax+By+C=0, QR: A'x+B'y+C'=0 y PR: A''x+B''y+C''=0o la ecuación de los lados del triangulo PQR. (figura 1). Sea O (hr)un punto de la bisectriz l1 del ángulo p; considerando distancias dirigidas de los lados PR y PQ del triangulo al punto O, tenemos que para la bisectriz L1:d1=-d2 es decir:

$$A''x+B''y+C''/+-\text{raiz}(A'')^2+(B'')^2=Ax+By+C/+-\text{raíz de } A^2+B^2$$

De la misma manera, sea O (h r) un punto de la bisectriz l2del ángulo Q (figura 2); considerando distancias dirigidas de los lados PQ y QR del triangulo al punto O, tenemos que para la bisectriz l2:d1=-d2’es decir:

$$Ax+By+C/+-\text{raiz}A^2+B^2=A'x+B'y+C'/+-\text{raíz de } (A')^2+(B')^2$$

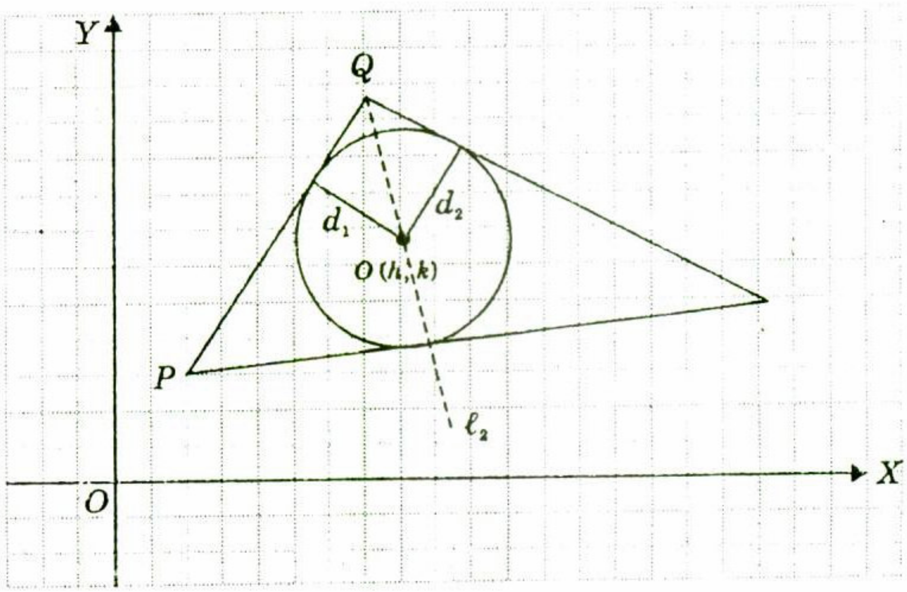


Figura 2.

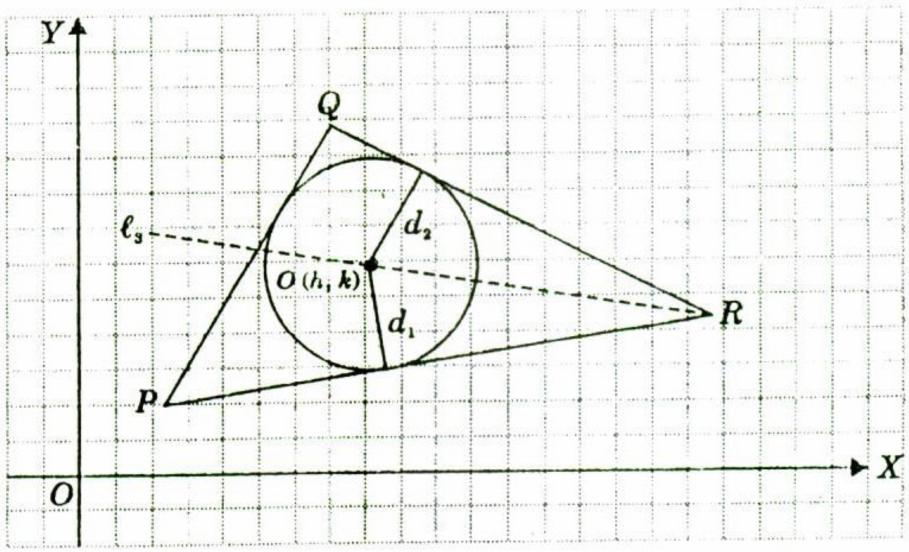


Figura 3.

Sea O (h r) un punto de la bisectriz l3 del ángulo R (figura 3); considerando distancias dirigidas de los ángulos PR y QR del triangulo al punto O, tenemos que para la bisectriz l3:d1=d22'es decir:

$$A''x+B''y+C''/\pm raiz(A')^2+(B'')^2=A'x+B'y+C'/\pm \text{raíz de } (A')^2+(B')^2$$

Incetro

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores del triangulo. El incetro es el centro de la circunferencia inscrita en el triangulo, cuyos lados son tangentes a la circunferencia (figura 4)

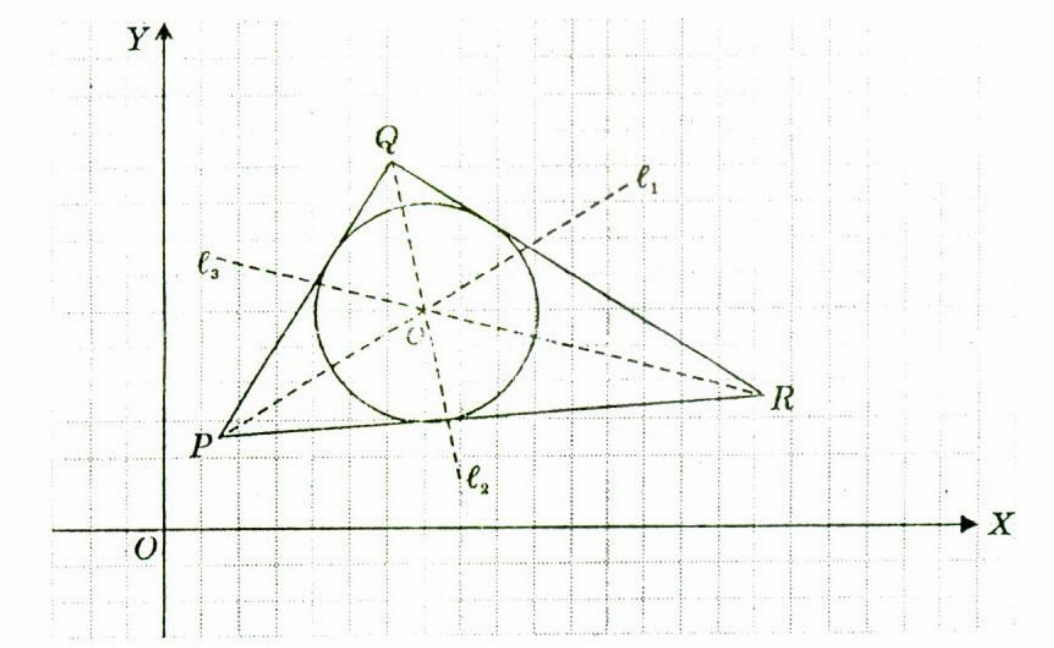


Figura 4.

L1, l2, l3 (bisectrices)
L1nl2nl3=0 (insentro)
El insentro siempre es interior al triangulo

Ecuación como lugar geométrico de la mediatriz de un segmento

La mediatriz de un segmento de la recta perpendicular que pasa por el punto medio, es decir, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

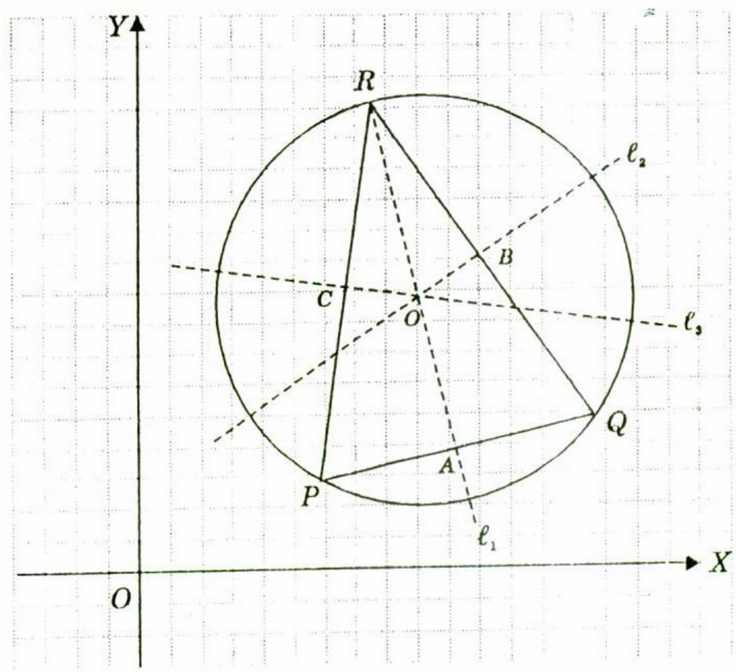
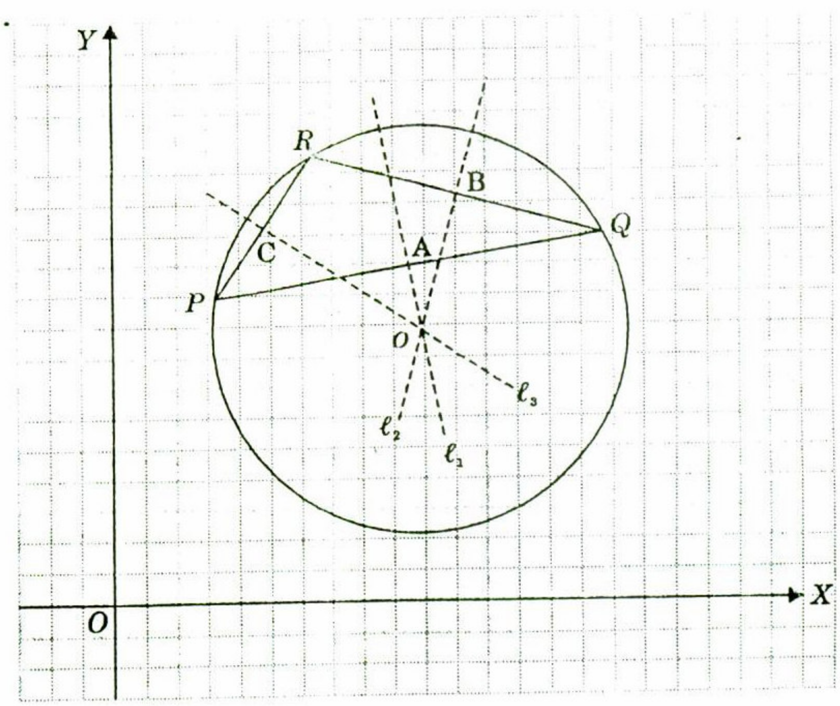


Figura 5.



Con base a las figuras 5 y 6, los puntos P(x1 y1) Q(x2 y2) R(x3 y3) son los vértices de un triangulo, en donde l1 es la mediatriz que pasa por el punto medio A (xa ya) del lado PQ del triangulo dado.

Como la mediatriz l1 y el lado PQ son perpendiculares entre si, se tiene que sus pendientes son reciprocas y de signo contrario por lo que:

$$mL1=-1/mPQ$$

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, tenemos que la ecuación de la mediatriz L1 es:

$$y-ya=-1/mPQ(x-xa)$$

De la misma manera, sean L2 y L3 las mediatrices que pasan por los puntos medios B (xb yb) y C (xc yc) de los lados QR y PR, respectivamente, del triangulo dado.
Como las mediatrices L2 y L3 así como los lados QR y PR son, respectivamente, perpendiculares entre si, se tiene que sus perpendiculares son reciprocas y de signo contrario, por lo que:

$$mL2=-1/mQR \quad y \quad mL3=-1/mPR$$

al aplicar la ecuación punto pendiente de la recta, tenemos que la ecuación de las mediatrices L2 y L3 son:

$$Y-Yb=-1/mQR(x-xb) \quad y \quad Y-Yc=-1/mPR\ (x-xc)$$

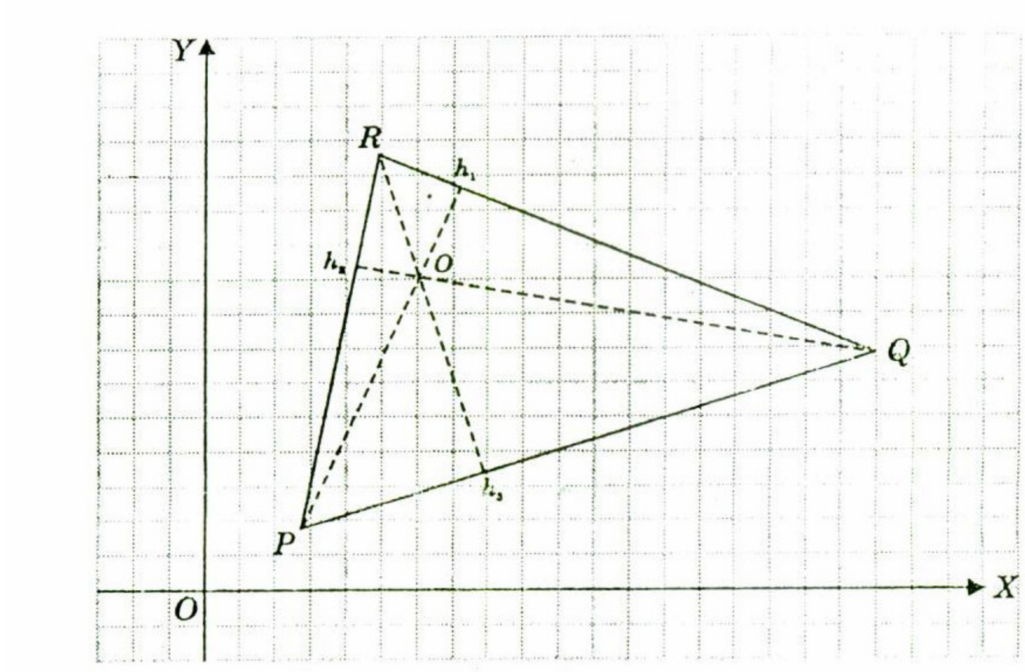
Circuncentro

Es el punto de intersección de las mediatrices de los triángulos. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triangulo, de tal manera que los tres vértices del triangulo tocan la circunferencia.
De la figura 5 se observa que L1, L2, L3 son las mediatrices de los lados PQR; las intersecciones de dichas mediatrices dan lugar al punto O (h r9 que se denomina circuncentro (L1n, L2n, L3n =0); por, ultimo, par esta grafica se establece: un triangulo acutángulo, el circuncentro es interior al triangulo.
De la figura 6 observa que L1, L2, L3 son mediatrices de los lados del triangulo PQR; las intersecciones de dichas mediatrices dan lugar al punto O(h r) que se denomina circuncentro (L1n, L2n, L3n=0); por ultimo, para esta grafica se establece : se establece un triangulo obtusángulo, el circuncentro es exterior al triangulo.

Ecuación y longitud de las alturas del triangula

La altura del triangulo es el segmento de recta se traza desde un vértice perpendicularmente a su lado opuesto.

Los vértices de un triangulo son P(x1 y1) Qx2 y2) R(x3 y3), en donde h1 es la altura trazada perpendicularmente desde el vértice P asta el lado opuesto QR del triangulo dado (figura 7)



Como la altura h1 y el lado QR son perpendiculares entre si, entonces sus pendientes son reciprocas y de signo contrario por lo que:

Mh1=-1/mQR

Al aplicar la ecuación punto pendiente de la recta, tenemos que la ecuación de la altura h1 es:

y-y1=-1/mQR(x-x1)

De la misma manera sean h2, h3 las alturas trazadas perpendicularmente desde los vértices Q y R a los lados opuestos PR y PQ, recíprocamente en el triangulo dado.

Como las alturas h2, h3 son perpendiculares entre si, así como los lados PR y PQ, se tiene que sus pendientes son reciprocas y de signo contrario por lo que

Mh2=-1/mPR y mh3=-1/PQ

Al aplicar la ecuación punto pendiente de la recta tenemos que la ecuación de lñas alturas h2 y h3 es

y-y1=-1/mPR(x-x2) y y-y3=-1/mPQ(x-x3)

la longitud de la altura se determina al aplicarla ecuación de la distancia de una recta a un punto, es decir: sea la ecuación PQ Ax9+By+C=0 QR a'x+b'y+c'=0 PR A''x+B''y+C''=0 la de los lados de los triángulos dado la longitud de la altura h1 es la distancia de la recta QR A'x+B'y+C'=0 al vértice P(x1 y1) se expresa por:

dh=a''x+b''y+c''/+- raiz de (a'')al cuadrado + (b'') al cuadrado

De la misma manera, la longitud de las alturas h2, h3 es respectiva a la recta PR A''x+B''y+C''=0 al vértice Q(x2 y2) y de la recta PQ Ax+By+C=0 al vértice R por lo que se expresa:

Dh2=a''x2+b''y2+c''/+- raiz de (a'')al cuadrado + (b'') al cuadrado
Y de
Dh3=ax3+by3+c/+- raiz de a al cuadrado + b al cuadrado

Ortocentro

El punto de concurrencia de de las tres alturas del triangulo en la figura 7 se tiene h1n, h2n, h3n=0, en donde 0 representa el ortocentro; se ase notar que un triangulo acutángulo el ortocentro es siempre interior al triangulo.
En la figura 8 se observa que el triangulo rectángulo el ortocentro coincide con el del vértice del ángulo recto. En la figura 9 se hace notar que el ortocentro en el triangulo obtusangulo es exterior al triangulo y es el punto de interseccion de las prolongaciones de las alturas

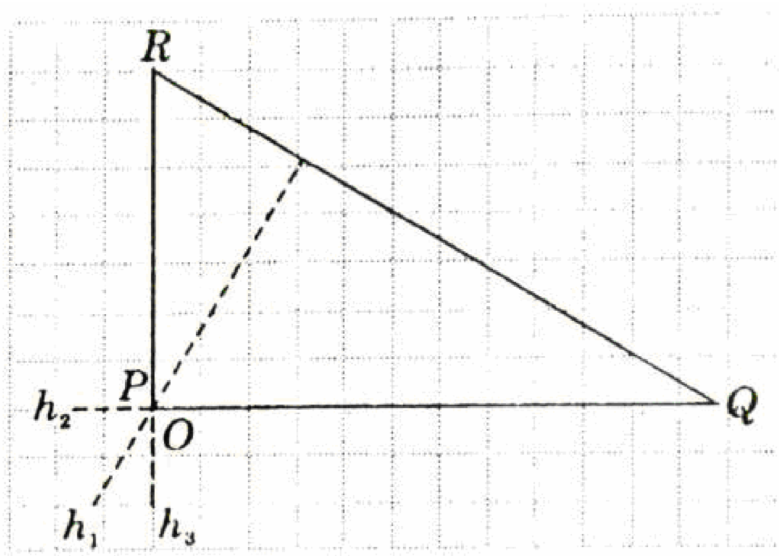


Figura 8.

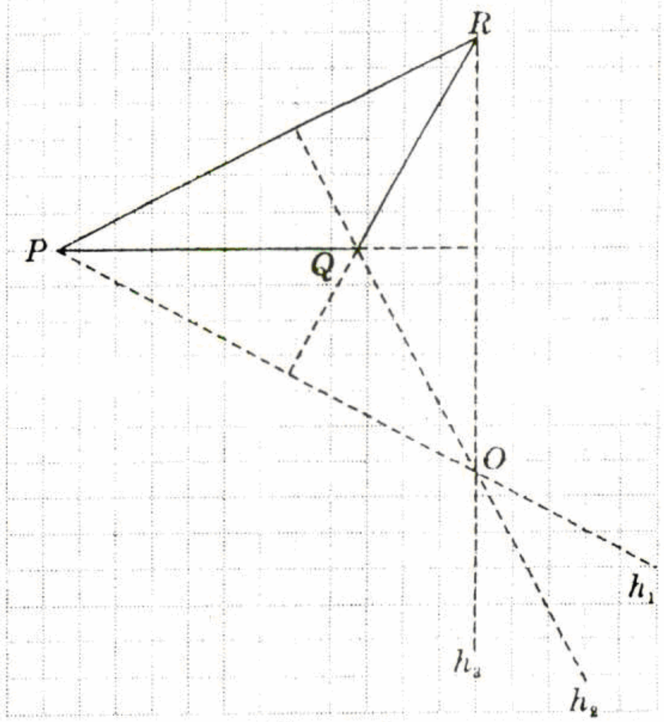


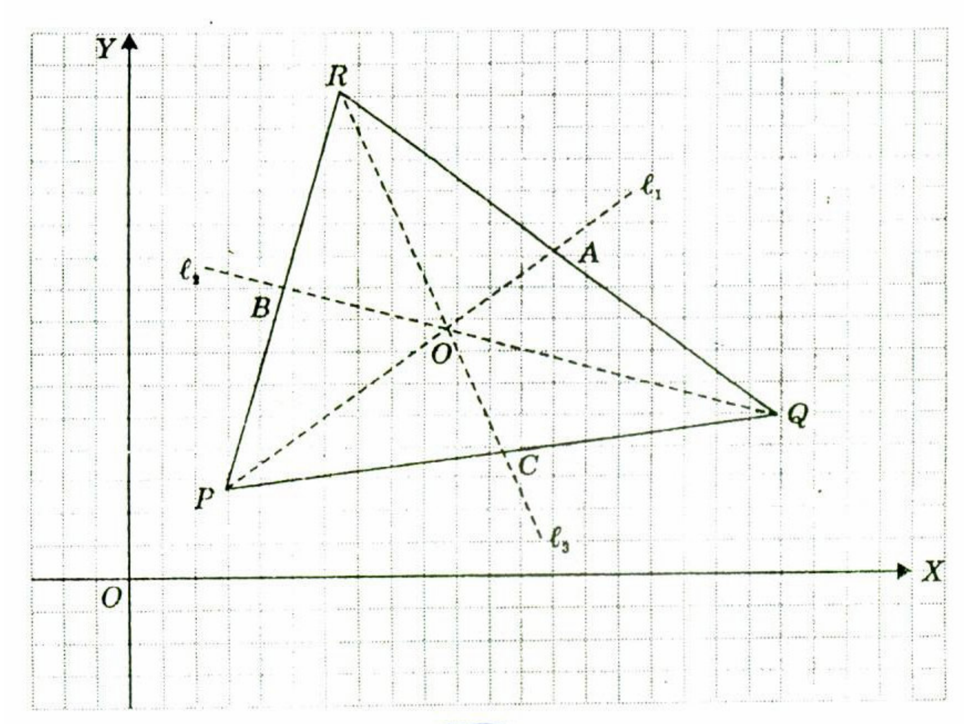
Figura 9.

$h_1 \cap h_2 \cap h_3 = O$
O es el ortocentro

Ecuación y longitud de las medidas de un triangulo

La mediana en el triangulo es la que se trasa de un vértice a un punto medio del lado opuesto.
Los vértices de un triangulo son P(x1, y1) Q(x2, y2) y R(x3, y3) en donde L1 es la mediana trazada desde el vértice P al punto medio A(xa, ya) del lado opuesto QR del triangulo dado (figura 10).
Al aplicar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dado, tenemos que la ecuación de la mediana L1 es:

y-y1=(y1-ya/x1-xa)(x-x1)



De la misma manera, para las medianas L1 y L2 trazadas desde los vértices Q y R a los puntos medios B(xb, yb) y C(xc, yc) de los lados opuestos PR y PQ respectivamente, en el triangulo dado, tenemos que sus ecuaciones son:

$$y-y2= (y2-yb/x2-xb)(x-x2) \text{ y } y-y3=(y3-yc/x3-xc)(x-x3)$$

Para determinar la longitud es de las medidas, aplicamos la ecuación de distancias entre dos puntos, y resulta:

Para L1 la longitud es: dPA=raíz de $(x1- xa)^2 + (y1-ya)^2$

Para L2 la longitud es: dQB=raíz de $(x2- xb)^2 + (y2-yb)^2$

Para L3 la longitud es: dRC=raíz de $(x3- xc)^2 + (y3-yc)^2$