MATEMÁTICAS III

GEOMETRIA ANALITICA

DESCRIPCION GENERAL

En el curso el alumno será capaz de utilizar la geometría y sus características mediante un análisis algebraico y grafico, analizara las diferentes formas de la ecuación de la línea recta como modelo de una proporción directa, así como otras curvas conocidas como cónicas y sus ecuaciones.

OBJETIVO GENERAL:

Al termino del curso el alumno tendrá las competencias suficientes para comprender que un conjunto de puntos en un plano que corresponden a una recta, una circunferencia, una parábola, una elipse, o una hipérbola, se pueden representar por medio de una ecuación algebraica, así como identificar las diferentes expresiones de la ecuación $Ax^{2,}+,Bxy,+,Cy^{2,}+,Dx,+,Ey,+,F=0$, diferenciando las características principales de cada expresión con respecto a los valores de los coeficientes A, B, C.

UNIDAD I. CONCEPTOS BÁSICOS.

Objetivo Particular:

Al término de la unidad el alumno será capaz de definir e identificar a los conjuntos y las diferentes operaciones entre ellos.

1.1. *<u>Introducción a los conjuntos.</u>*

CONJUNTO: El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de la matemática. Intuitivamente se considera que un conjunto es una lista, colección o clase de objetos bien definidos.

Los componentes de un conjunto pueden ser de cualquier tipo, como personas, letras, números, ríos, etc. A estos objetos o componentes individuales se les llama ***elementos*** o ***miembros*** del conjunto.

NOTACIÓN: Se acostumbra denotar los conjuntos empleando letras mayúsculas.

A, B, C, … X, Y, Z.

y los elementos de los conjuntos con letras minúsculas
a, b, c, … x, y, z.

Al expresar un conjunto por la efectiva enumeración de sus elementos, separándolos por comas y encerrándolos entre llaves, se estará haciendo en la llamada forma *tabular*, por *extensión* o *explicita* de un conjunto.

Pero si se define un conjunto enunciando propiedades que deben tener los elementos, entonces se estará empleando la forma por *comprensión* o *constructiva* de un conjunto.

Para ilustrar las dos formas anteriores se tiene el siguiente:

EJEMPLO1.1

El conjunto de números pares positivos menores que once.

a) Si se expresa en forma tabular o por extensión, llamando "**A**" al conjunto, queda de la siguiente manera:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

b) Si se representa en la forma constructiva, esto es enunciando sus propiedades, queda:

$$A = \{ x \mid x \text{ es un número par positivo } < 11 \}$$

donde la barra vertical se lee "*tal que*", por lo que la lectura completa de la expresión es: "***A***" es el conjunto de todas las "***x***", tales que "***x***" es un numero par positivo menor que once.

Para ampliar el concepto de las dos notaciones anteriores, se ilustran los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.1

FORMA TABULAR: $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ ... \}$

FORMA CONSTRUCTIVA: $B = \{ x \mid x \text{ es un entero positivo} \}$

EJEMPLO 3.1

FORMA TABULAR: $T = \{ -2, \ 6 \}$

FORMA CONSTRUCTIVA: $T = \{ x \mid x^2 - 4x - 12 = 0 \}$

EJEMPLO 4.1

FORMA TABULAR: $M = \{ \text{MADRID}, \text{LONDRES}, \text{ROMA}, \text{PARIS}, \ ... \}$

FORMA CONSTRUCTIVA: $M = \{ x \mid x \text{ es una ciudad capital}, \quad x \text{ esta en Europa} \}$

Si un objeto "***b***" pertenece al conjunto "***A***", se dice que "***b***" es un elemento de "***A***" y se denota por la expresión $b \in A$, que se lee "***b*** pertenece a "***A***" ó "***b***" esta en "***A***".

Si por el contrario un objeto "***c***" no es elemento del conjunto "***A***", es decir, si "***A***" no contiene a "***c***" entre sus elementos, se escribe $c \notin A$.

Se acostumbra en la matemática, poner una línea inclinada "***/***" tachando un símbolo para indicar lo opuesto o la negación del significado del símbolo.

EJEMPLO 5.1

SI $A = \{ a, e, i, o, u \}$ entonces, $a \in A$, $b \notin A$, $o \in A$ y $d \notin A$

EJEMPLO 6.1

Si $B = \{ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots 22 \}$ entonces, $5 \notin B$, $6 \in B$, $11 \notin B$ y $20 \in B$

1.1.1 *<u>Definiciones de conjunto y subconjunto</u>.*

CONJUNTOS FINITOS e INFINITOS: Una de las diferentes formas en las que se distingue o clasifica a los conjuntos es considerarlos como finitos o infinitos. Intuitivamente, un conjunto finito es aquel que consta de cierto número de elementos, es decir, si es posible contar el número de sus elementos. En caso de que el número de sus elementos no sea posible determinarlo, entonces es un conjunto infinito.

EJEMPLO 7.1

Si $P = \{ x \mid x \text{ es un rio de la tierra} \}$ "***P***" es un conjunto finito, aunque sea difícil contar los ríos del mundo.

EJEMPLO 8.1

Si $Q = \{ x \mid x \text{ sea un numero impar} \}$ "***Q***" es un conjunto infinito, ya que no es posible determinar el numero de sus elementos.

IGUALDAD DE CONJUNTOS: Dos conjuntos "***A***" y "***B***" son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, esto es, si cada elemento que pertenece a "***A***" pertenece también a "***B***", y si cada elemento que pertenece a "***B***", pertenece también a "***A***".

La igualdad de conjuntos se simboliza por ***A*** = ***B***

EJEMPLO 9.1

los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, a, a, c, c, b\}$ son iguales ya que tienen a los mismos elementos, ya que el orden en que estén y la repetición de algunos de sus elementos no alteran el conjunto.

EJEMPLO 10.1

Los conjuntos $S = \{\, x \mid x \text{ es un numero primo par} \,\}$ y $T = \{2\}$ son iguales, ya que son dos formas distintas de definir el mismo conjunto.

EJEMPLO 11.1

Si $G = \{\, x \mid x \text{ es un numero par} \}$ y $F = \{\, x \mid x \text{ es una potencia entera positiva de } 2\}$ entonces "***F***" ≠ "***G***" ya que: $G = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ y $F = \{\, 2, 4, 8, 16, \ ... \,\}$

CONJUNTO VACIO: El conjunto vacío, es el conjunto que carece de elementos, al cual también se le puede llamar *conjunto nulo*, y se denota con el símbolo de "***Ǿ***".

EJEMPLO 12.1

a) $A = \{\, x \mid x^2 + 4 = 0, \ x \text{ sea real} \,\}$ entonces "***A***" es un conjunto que carece de elementos.

EJEMPLO 13.1

b) $B = \{y \mid y \text{ sea una persona viviente con mas de 200 años de vida} \,\}$ obviamente "***B***" es un conjunto vacío.

Es importante aclarar que el conjunto $M = \{\, 0 \,\}$, ***no*** es un conjunto vacío, ya que "***M***" tiene como elemento al numero cero.

CONJUNTO UNIVERSAL: En toda aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que se consideran, serán muy probablemente parte de otro conjunto. Se llama conjunto universal al que contiene todos los elementos del tema en estudio y se representa por el símbolo "***U***".

EJEMPLO14.1

Si el tema es relacionado con letras

$$Y = \{\text{todas las letras del alfabeto}\}$$

EJEMPLO 15.1

En los estudios sobre población humana

$$Y = \{ \text{todas las gentes del mundo} \}$$

SUBCONJUNTO: Si todo elemento de un conjunto "***A***", es también elemento de un conjunto "***B***", entonces se afirma que "***A***" es subconjunto de "***B***". Es decir: "***A***" es un subconjunto de "***B***", si $x \in A$ implica que $x \in B$. Lo anterior se simboliza de la siguiente forma:

$$A \subset B$$

Donde el símbolo $\subset$ indica "subconjunto de", y se lee: "***A***" es un subconjunto de "***B***" o "***A*** está contenido en "***B***".

EJEMPLO 16.1

Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ entonces $A \subset B$.

EJEMPLO 17.1

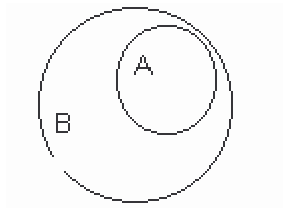
Si $F = \{ x \mid x \text{ es par} \}$ y $G = \{ x \mid x \text{ es potencia entera positiva de } 2 \}$ entonces $G \subset F$, lo que significa que toda $x \in G$, también es $x \in F$, es decir que "***G***" esta contenido en "***F***".

El conjunto vacío se puede considerar un subconjunto de cualquier conjunto.

DIAGRAMAS DE VENN-EULER: Para ilustrar gráficamente de una manera sencilla e instructiva las relaciones entre dos o mas conjuntos se emplean los diagramas de Venn-Euler, o simplemente diagramas de Venn, los cuales representan un conjunto mediante un área plana, por lo general delimitada por un circulo.

EJEMPLO 18.1

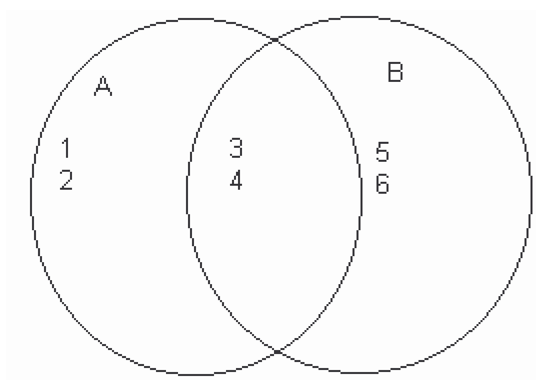
Suponiendo que $A \subset B$ y además que $A \neq B$ entonces la relación entre "***A***" y "***B***" se puede describir con el siguiente diagrama.



$A \subset B$

EJEMPLO 19.1

Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$ entonces, representando a estos conjuntos mediante un diagrama de Venn:



EJERCICIO 1.1

1. Los siguientes conjuntos están expresados en forma constructiva, escríbelos en forma tabular:

a) $A = \{x \mid x \text{ es un numero positivo impar menor que } 14\}$
b) $B = \{y \mid y \text{ es una letra de la palabra matematicas}\}$
c) $C = \{z \mid z \text{ sea un numero par positivo}\}$
d) $D = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$
e) $A = \{y \mid y \text{ sea un perro que hable español}\}$

2. Representar los siguientes conjuntos en forma constructiva

a) $A = \{12, 14, 16, 18\}$
b) $P = \{a, e, i, o, u\}$
c) $H = \{2, 4, 6, 8, \ ... \ 22\}$
d) $M = \{\text{el conjunto de os maestros de este plantel menores de 10 años de edad}\}$

3. Empleando la notación de conjuntos, escriba las siguientes afirmaciones:

a) Los conjuntos "***M***" y "***N***" son iguales.
b) ***x*** no es un elemento de "***A***".
c) El numero ***2*** es un elemento del conjunto "***K***".
d) "***S***" es un subconjunto de "***T***".
e) "***z***" no pertenece a "***B***".

4. Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 0\}$
$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$D = \{3, 6, 9\}$
$E = \{1, 5, 7, 9\}$
$F = \{2, 4\}$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuales verdaderas, explique el por que?

a) $A \subset B$
b) $A \not\subset E$
c) $B \subset A$
d) $C \subset B$
e) $D \subset C$
f) $E \subset C$
g) $D = E$
h) $F \subset B$
i) $\varnothing \subset B$
j) $F \subset B$

5. Si $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x^2 = 4, \ x \text{ es positivo}\}$
$C = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$ $D = \{x \mid x^2 \text{ es un numero par}\}$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuales verdaderas:

a) $B \subset C$
b) $A \subset C$
c) $A \subset D$
d) $B \subset \varnothing$
e) $A = C$
f) De los cuatro conjuntos $D = U$

OPERACIONES CON CONJUNTOS: En aritmética, se realizan operaciones como la suma, la resta y multiplicación entre otras. De manera similar en los conjuntos se realizan operaciones como es la unión y la intersección de los mismos.

UNIÓN: La unión de dos conjuntos "***A***" y "***B***" se define como el conjunto compuesto por todos los elementos que están en "***A***" ó "***B***" ó en ambos. Se utiliza el símbolo $\cup$ para representar la operación.

Se denota por $A \cup B$ y se lee "A unión B". Esto es $A \cup B = \{x \mid x \in A \quad o \quad x \in B\}$.

EJEMPLO 20.1

Si $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $T = \{b, d, f, g\}$.

LUEGO $S \cup T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

EJEMPLO 21.1

Si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Se observa que $A \cup B = B \cup A$ y además "***A***" y "***B***" son ambos subconjuntos de $A \cup B$ es decir que:

$$A \subset (A \cup B) \quad y \quad B \subset (A \cup B)$$

INTERSECCION: La intersección de dos conjuntos "***A***" y "***B***" se define como el conjunto formado por los elementos que pertenecen a "***A***" y también pertenecen a "***B***". Se utiliza el símbolo $\cap$ para representar la operación.

Se denota por $A \cap B$ y se lee "***A*** intersección ***B***".

Es decir $A \cap B = \{x \mid x \in A \quad y \quad x \in B\}$

EJEMPLO 22.1

Si $V = \{2, 4, 6, 8 10\}$ y $W = \{1, 2, 3, 4 5, 6\}$

Luego $V \cap W = \{2, 4, 6\}$

EJEMPLO 23.1

Si $S = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$ y $T = \{2, 3, 4\}$

Luego $S \cap T = \{3\}$

COMPLEMENTO: El complemento de un conjunto "***A***" es el conjunto de los elementos que no pertenecen a "A", pero que están en "U". Se utiliza el símbolo de *comilla sencilla (′)*, para representar la operación, esto es el complemento de "***A***" se denota por ***A'*** y se lee "complemento de "***A***".

Es decir $A' = \{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$

EJEMPLO 24.1

Si $A = \{a, b, c\}$, siendo "U" el conjunto de todas las letras del alfabeto, entonces:

$A' = \{d, e, f, ..., z\}$

EJEMPLO 25.1

Si $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Entonces $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Como consecuencia de lo anterior, se observa que:

$$A \cup A' = U \quad y \quad A \cap A' = \varnothing$$

Y además $(A')' = A$

EJERCICIO 2.1

6. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{3, 4, 5, 6\}$

Encontrar:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup C$
d) $A \cap B$
e) $A \cap C$
f) $B \cap C$

7. Para los mismos conjuntos A, B y C del problema anterior, encontrar:

g) $A \cap (B \cup C)$
h) $A \cup (B \cup C)$
i) $B \cap (B \cup C)$
j) $C \cup (A \cup C)$
k) $A \cap (B \cap C)$

8. Si el conjunto universal es: $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean $A = \{a, b, c, d, e,\}$ $B = \{a, c, e, g\}$ y $C = \{b, e, f, g\}$
Hallar:
a) $A \cup C$
b) $B \cap A$
c) C'
d) $B' \cup C$
e) $C' \cap A$
f) $(A \cap A')'$

1.1.2. <u>Conjunto producto. Concepto de par ordenado</u>

PAR ORDENADO: Intuitivamente se considera que un par ordenado consta de dos elementos, "a" y "b", por ejemplo, que se designan como primera y segunda componente respectivamente. Se simboliza por:

$$(a, b)$$

se puede considerar que en lo general, (a, b) es diferente de (b, a)

EJEMPLO 26.1

(2, 3) y (3,5) son pares ordenados con componentes diferentes

EJEMPLO 27.1

(1, 1) y (6, 6) son pares ordenados con componentes iguales

EJEMPLO 28.1

Los puntos del plano cartesiano representan pares ordenados de números reales.

CONJUNTO PRODUCTO: Dados dos conjuntos "A" y "B", recibe el nombre de conjunto producto de "A" y "B", al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) en donde $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por: "A x B", que se lee: "A cruz B".
Es decir $A \times B = \left\{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \right\}$

EJEMPLO 29.1

Si $A = \left\{ 1, 2, 3 \right\}$ y $B = \left\{ a, b \right\}$

Entonces $A \times B = \left\{ (1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b) \right\}$

EJEMPLO 30.1

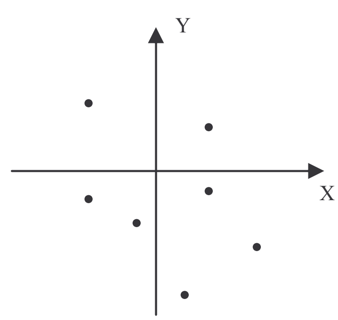
Si $T = \left\{ 3, 5 \right\}$

Entonces $T \times T = \left\{ (3, 3),\ (3, 5),\ (5, 3),\ (5, 5) \right\}$

De la definición anterior se observa que si el conjunto "A" tiene "n" elementos y el conjunto "B" tiene "m" elementos, el conjunto producto tiene "n x m" elementos. De igual forma se aprecia que $A \times B \neq B \times A$

EJEMPLO 31.1

Si se considera que "R" es el conjunto de los números reales, R x R, representa el conjunto de pares ordenados de todos los números reales y su grafica es el plano cartesiano.



1.2. Plano Cartesiano.

1.2.1. <u>*Sistema coordenado unidimensional*</u>.

Si sobre una recta se escoge un origen, una longitud y un sentido positivo, entonces existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta; en este caso se dice que se tiene una escala grafica de los números reales. Mismo que recibe el nombre de sistema coordenado unidimensional; el numero real “x” que corresponde a un punto “P” del eje ordenado se llama coordenada de “P”, en tanto que este es la grafica de “x”.

EJEMPLO 32.1

Graficar: P_1 (2), P_2 (-3), P_3 (¶), P_4 (-5/2), P_5 ($\sqrt{2}$)

(Hacer grafica del ejemplo)

1.2.2. *Sistema coordenado bidimensional*.

El concepto anterior de sistema coordenado unidimensional puede emplearse para establecer una correspondencia biunívoca entre los pares ordenados de números reales y los puntos de un plano. Para ello, se construyen sobre este dos sistemas coordenados unidimensionales “0x” y “0y”, de modo que sus orígenes coincidan y sean perpendiculares.

1.2.3. *Coordenadas rectangulares*.

Por medio de un sistema coordenado bidimensional se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los elementos del conjunto de pares ordenados de números reales R x R.

Los números “x_1” y “y_1” son las coordenadas rectangulares o sencillamente las coordenadas de “P”.

$$P\ (x_1,\ y_1)$$

Los ejes coordenados dividen a un plano en cuatro regiones llamadas “cuadrantes”. Numerados I, II, III y IV.

EJEMPLO 33.1

1.2.4. Localización de puntos en el plano.

Graficar los puntos: P_1 (2, 5), P_2 (-3, -4), P_3 (4, -4), P_4 (0, -3).

(Hacer grafica del ejemplo)

1.2.5. *Coordenadas polares*.

COORDENADAS POLARES: En lugar de establecer la posición de un punto en un plano en función de sus distancias a dos rectas perpendiculares, es preferible, en ocasiones, hacerlo en función de su distancia a un punto fijo y de la dirección con respecto a una recta fija que pase por este punto. En este caso, con esta referencia, se le da el nombre de coordenadas polares.

1.2.6. *Relación entre las coordenadas polares y rectangulares*.

De la figura anterior, se establece la relación existente entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares.

Sea: $\text{Cos}\,\phi = \dfrac{x}{r}$, luego $x = r\ \text{Cos}\,\phi$

$\text{Sen}\,\phi = \dfrac{y}{r}$, luego $y = r\ \text{Sen}\,\phi$

Además $x^2 + y^2 = r^2$ luego $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\text{Tan}\,\phi = \dfrac{x}{y}$, luego $\phi = \text{ang Tan}\,\dfrac{x}{y}$

EJEMPLO 34.1

Hallar un par de coordenadas polares del punto "P" cuyas coordenadas rectangulares son (3, - 5)

En este caso, x = 3 y y = -5, por lo tanto:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 25}$$
$$= \sqrt{34}$$

$$\phi = \text{ang Tan}\,\frac{y}{x}$$
$$= \text{ang Tan}\left(-\ \frac{3}{5}\right)$$
$$\therefore \quad \phi = 300^0\ \ 58'$$

Entonces: las coordenadas polares en “P” son:

$$P\ (\ \sqrt{34},\ \ 300^0\ \ \ 58'\ )$$

EJEMPLO 35.1

Hallar las coordenadas rectangulares del punto “P”, cuyas coordenadas polares son $(\ 4,\ \ 120^0\ )$

En este caso $r = 4$, $\Theta = 120^0$

Luego:

$$x = r\ \text{Cos}\,\phi$$
$$= 4\ \text{Cos}\,120^0$$
$$= 4\left(-\ \frac{1}{2}\right)$$
$$= -\,2$$

$$y = r\ \text{Sen}\,\phi$$
$$= 4\ \text{Sen}\,120^0$$
$$= 4\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\ \sqrt{3}$$

Luego el punto P tiene como coordenadas rectangulares:

$$P(-2,\ \ 2\sqrt{3})$$

Adicionar ejercicios
(9)

(10)

1.3. *Localización de conjuntos de puntos en el plano*.

Se considera que la geometría analítica es la rama de la matemática que relaciona a **el algebra con la geometría**, es decir que los dos problemas básicos que atiende son:

a) Dada una ecuación, encontrar el lugar geométrico que representa.
b) Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación algebraica o su ecuación matemática.

1.3.1 *Concepto de conjunto relación*.

UNA RELACIÓN "R", es el subconjunto de pares ordenados del producto cartesiano A x B que satisfacen una condición

La forma mas común de representar una relación es:

$$R = \{ (x, y) \mid S\ x\ y \}$$

En donde $S\ x\ y$ es la expresión que deben satisfacer los pares ordenados (x, y).

1.3.2 Gráfica de una relación.

La grafica de una relación R en $|R$, es el conjunto "A" de todos los puntos del plano coordenado que cumplen con la propiedad.

$$P(x, y) \in A \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Esto es, que la grafica de una expresión $S\ x\ y$, es la grafica de la relación

$$R = \{ (x, y) \mid S\ x\ y \}$$

Es común representar la expresión $S\ x\ y$ en forma de una ecuación o inecuación.

$$R = \{ (x, y) \mid E(x, y) = 0 \}$$

En este caso, la grafica de la ecuación E (x, y) = 0, es la grafica de la relación "R" dada.

EJEMPLO 36.1

Construir la grafica de la relación:

$$R = \{ (x, y) \mid y = x^2 - 1 \}$$

Solución: Se obtiene un numero suficiente de puntos, asignando valores a "x", calculando los de "y", obteniendo los pares ordenados que permitan graficar. (Método de tabulacion).

(Hacer la grafica)

1.3.3 *Noción de función y su gráfica*.

Si a cada elemento de un conjunto "A", se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto "B", se dice que esta correspondencia es una función.

Al expresar de otra manera lo anterior, se dice que una función es un conjunto de pares ordenados, de tal forma que no existen en el conjunto dos pares ordenados con las primeras componentes iguales.

1.3.4 *Dominio y Codominio*.

Se llama **dominio** de una función al conjunto formado por las primeras componentes, es decir al conjunto "A". Al conjunto "B" formado por las segundas componentes de los pares ordenados se le da el nombre de **codominio** de la función.
Al codominio de una función se le llama también contradominio, rango o recorrido.

EJEMPLO 37.1

Al establecer una función, si se asigna a cada país del mundo su ciudad capital. En este caso el dominio es el conjunto de países del mundo y el codominio de la función es el conjunto formado por sus capitales. (Francia, Paris), (Inglaterra, Londres), (Cuba, La Habana) ….

Para saber si la grafica de una relación representa o no una función, se trazan paralelas al eje “Y”, tantas como se requieran; si al menos una de las paralelas corta con la grafica en dos o mas puntos, la grafica ***no*** es la representación de una función, y, en caso de que la paralela corte la grafica en un solo punto, ***si*** es una función.

EJEMPLO 38.1

(Hacer la grafica)

Si es una función, ya que al trazar paralelas al eje “Y”, corta a la grafica en un solo punto.

EJEMPLO 38.1b
(Hacer la grafica)

No es una función ya que una paralela al eje “y”, corta a la grafica en dos puntos.

EJERCICIO.

11. Si el conjunto universo (U) son los números reales, construya la grafica de cada una de las siguientes relaciones.

a) $R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
b) $R_2 = \{(x, y) \mid y = x^3\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4\}$

12. En los siguientes problemas, determinar si las relaciones son funciones, encuentre su dominio y codominio y trace su grafica.

a) $\left\{ (x, y) \mid y = -\frac{2}{3}x + 2 \right\}$

b) $\left\{ (x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 = 36 \right\}$

1.4. <u>*Distancia entre dos puntos*</u>.

A).- En un sistema unidimensional.

Hay que recordar que la porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se le llama segmento rectilíneo o simplemente segmento.
Los dos puntos se llaman *extremos del segmento*.

La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.
Al analizar que el segmento $\overline{AB}$ es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta ℓ de "A" hacia "B". Se dice que el segmento $\overline{AB}$ esta dirigido de "A" a "B", y se indica esto por medio de una flecha como se muestra en la figura. (Hacer la grafica)

En este caso, el punto "A" se llama origen o punto inicial y "B" extremo o punto final, también se puede definir el mismo segmento dirigiéndolo de "B" a "A". El sentido de un segmento dirigido se indica siempre mencionando primero el origen o punto inicial.

A continuación se determinara la longitud del segmento que une dos puntos dados cualesquiera, tales como $P(x_1)$ y $P(x_2)$.

(Hacer grafica)

Se tiene que: $\overline{OP_1} + \overline{P_1 P_2} = \overline{OP_2}$

Pero: $\overline{OP_1} = x_1$ y $\overline{OP_2} = x_2$

Luego: $x_1 + \overline{P_1 P_2} = x_2$

$$\therefore \quad \overline{P_1\ P_2} = x_2 - x_1 \quad y \quad \overline{P_{21}\ P_2} = x_1 - x_2$$

(Modificar la segunda expresión.)

Esto es, que en cualquier caso, la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final.

La distancia entre dos puntos se define como: el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos.

$$d = \left|\overline{P_1\ P_2}\right| = \left|x_2 - x_1\right| \quad o \quad d = \left|\overline{P_2\ P_1}\right| = \left|x_1 - x_2\right|$$

EJEMPLO 39.1

Hallar la longitud de los segmentos dirigidos y la distancia entre los puntos

P_1 (6) y P_2 (-4)

Los segmentos dirigidos son:

$$\begin{aligned} \overline{P_1\ P_2} &= x_2 - x_1 \\ &= -4 - 6 \\ &= -10 \\ \overline{P_1\ P_2} &= x_1 - x_2 \\ &= 6 - (-4) \\ &= 10 \end{aligned}$$

y la distancia esta dada por:

$$\begin{aligned} d &= \left| x_2 - x_1 \right| \\ &= \left| x_1 - x_2 \right| \\ &= \left| -10 \right| \\ &= \left| 10 \right| \\ &= 10 \end{aligned}$$

(Hacer grafica)

EJERCICIO 4.1

13. Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

a) (- 5) y (6)
b) (3) y (- 7)
c) (- 8) y (-12)

14. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (- 2), encontrar el otro punto (dos soluciones).

B).- En un sistema bidimensional.

A continuación se analiza la distancia entre dos puntos ubicados en un plano, esto es, en un sistema de ejes coordenados.
Sean $P_1\ (x_1,\ y_1)$ y $P_2\ (x_2,\ y_2)$, dos puntos dados cualesquiera, se determina la distancia "d" entre P_1 y P_2, $d = \left| \overline{P_1\ P_2} \right|$

(Hacer grafica)

En la figura anterior, se trazan las perpendiculares de los puntos a los ejes coordenados, formando a su vez un triángulo rectángulo, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\left| \overline{P_1\ P_2} \right|^2 = \overline{P_1\ C}^2 + \overline{C\ P_2}^2$$

$$\text{luego: } \left| \overline{P_1\ P_2} \right|^2 = \overline{A_1\ A_2}^2 + \overline{B_1\ B_2}^2$$

$$\text{Pero: } \overline{A_1\ A_2} = x_2 - x_1 \quad \text{y} \quad \overline{B_1\ B_2} = y_2 - y_1$$

$$\text{Ahora: } \overline{P_1\ P_2} = \left(x_2 - x_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2$$

$$\text{Entonces: } d = \left| \overline{P_1\ P_2} \right|$$

$$= \sqrt{\left(x_2 - x_1 \right)^2 + \left(y_2 - y_1 \right)^2}$$

(Corregir detalles de acuerdo al original.)

La distancia "d", siempre será positiva, siendo P_1P_2 el valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo. En la aplicación de la formula no interesa el sentido de las diferencias de las abscisas y ordenadas, ya que al elevarlas al cuadrado siempre se obtiene el mismo resultado $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$

EJEMPLO 40.1

Calcular la distancia entre los siguientes pares ordenados:

a) $P_1 \; (-4, \; -3)$ y $P_2 \; (2, 7)$

b) $P_1 \left(2, \; \frac{3}{2} \right)$ y $P_2 \left(-\frac{3}{2}, \; -1 \right)$

a)

$$
\begin{aligned}
d &= \left| \overline{P_1 \, P_2} \right| \\
&= \sqrt{\left[2 - (-4) \right]^2 + \left[7 - (-3) \right]^2} \\
&= \sqrt{36 + 100} \\
&= \sqrt{136} \\
&= 2\sqrt{34}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
d &= \left| \overline{P_1 \, P_2} \right| \\
&= \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - 2 \right)^2 + \left(-1 - \frac{3}{2} \right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{25}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{106}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{106}}{2}
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 41.1

Determinar si los puntos A (3, 7), B (5, - 5) y C (- 2, 0), son vértices de un triangulo rectángulo isósceles.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(5-3)^2 + (-5-7)^2}$$
$$= \sqrt{148}$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2-3)^2 + (0-7)^2}$$
$$= \sqrt{74}$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(2-5)^2 + (0+5)^2}$$
$$= \sqrt{74}$$

Si $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$, El triangulo es isósceles y por otra parte se observa que el teorema de Pitágoras se cumple, ya que:

$$\overline{AC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2} = \overline{AC}^{\,2}$$
$$74 + 74 = 148$$

Por lo tanto el triangulo también es rectángulo.

EJERCICIO 5.1

15. Encuentre la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) (5, 8) y (- 3, 2)
b) (10, 2) y (- 2, -2)
c) (0, 0) y (a-b, a + b)
d) (- 1, - 5) y (2, - 3)
e) (- 7, 4) y (1, 11)
f) $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$ y $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$

16. Calcular el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

a) (- 2, 5), (4, 3) y (7, - 2)
b) (2, - 5), (- 3, 4) y (0, 3)
c) (- 1, - 2), (4, 2) y (- 3, 5)

17. Determine en cada inciso si el triangulo , cuyos vértices se dan, es equilátero, isósceles o escaleno. Determine también cual de ellos es rectángulo.

a) (4, 4), (4, - 2) y (7, - 2)
b) (2, 6), (- 3, - 3) y (6, 2)
c) (-2, - 2), (2, 2) y $\left(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\right)$
d) (- 3, - 2), (7, 4) y (1, 14)
e) Calcular el área de los triángulos anteriores.

18. Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos fijos.

a) (3, 3), (4, - 1) y (8, - 2)
b) (4, 3), (4, - 1) y (- 3, - 8)
c) (2, 3), (4, - 1) y (5, 2)

19. Mediante la formula de la distancia, demostrar que los puntos siguientes son colineales.

a) (1, 2), (- 3, 10) y (4, - 4)
b) (- 2, 3), (- 6, 1) y (- 10, - 1)
c) 9 -2, 1), $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y (3, - 5)

1.5. Áreas de polígonos conocidas las coordenadas de sus vértices. (3 h)

1.5.1. *Área de un triángulo*.

Si se traza un triangulo con los puntos P_1 (x_1, x_2), P_2 (x_2, y_2) y P_3 (x_3, y_3) que son los vértices, graficándolo queda:

(Hacer grafica)

Al proyectar los puntos sobre el eje de las abscisas y de las ordenadas, se forma las figuras de unos trapecios en las que se basara el calculo del área del triangulo bajo el siguiente planteamiento:

ÁREA Δ $P_1P_2P_3$ = ÁREA $A_1A_3P_3P_1$ - ÁREA $A_1A_2P_2P_1$ - ÁREA $A_2P_3P_3P_2$

Al calcular el área de los tres trapecios, empleando la formula correspondiente, el segundo miembro de la ecuación anterior queda:

ÁREA Δ P1P2P3 =

$$\frac{\left(\overline{A_3P_3}+\overline{A_1P_1}\right)\left(\overline{A_1\ A_3}\right)}{2}-\frac{\left(\overline{A_2P_2}+\overline{A_1P_1}\right)\left(\overline{A_1\ A_2}\right)}{2}-\frac{\left(\overline{A_2P_2}+\overline{A_3P_3}\right)\left(\overline{A_2\ A_3}\right)}{2}$$

El resultado de las operaciones anteriores da el área sombreada, esto es, el área del triangulo.

ÁREA Δ P1P2P3 =

$$\frac{1}{2}\left[(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \right]$$

Al realizar las operaciones:

$$= \frac{1}{2}\left[x_3 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_1 y_1 - x_3 y_2 - x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_2 y_3 \right]$$

Simplificando:

$$\text{ÁREA } \Delta \text{ P1P2P3} = \frac{1}{2}\left[x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2 \right]$$

La expresión anterior se puede escribir en forma de determinante, y queda de la siguiente forma:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 42.1

Calcular el área del triangulo cuyos vértices son : (- 2, 3), (- 4, - 1) y (3, - 2)

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + 8 + 9 - (-3 + 4 - 12) \right]$$

$$15\,u^2$$

1.5.2. Área de un polígono.

EJEMPLO 42.1

Calcular el área del polígono cuyas coordenadas de los vértices son: (0, 4), (1, - 6), (- 2, -3) y (- 4, 2).

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -6 \\ -2 & -3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ -3\ -4\ -16\ -\ (12 + 12 + 4)\ \right]$$

$$= 25.5\,u^2$$

EJERCICIO 6.1

20. Calcular el área de los triángulos cuyas coordenadas de los vértices son:

a) (2, - 3), (4, 2) y (- 5, - 2)
b) (- 8, - 2), (- 4, - 6) y (- 1, 5)
c) $(\sqrt{2},\ 2)$, (- 4, 6), y (4, $-2\sqrt{2}$)
d) (- 7, - 5), (1, 1) y (- 3, 3)

21. Hallar el área de los polígonos cuyas coordenadas de vértices son:

a) (2, 5), (7, 5), (3, - 4) y (- 2, 3)
b) (1, 5), (- 2, 4), (- 3, - 1), (2, - 3) y (5, 1)
c) (- 5, - 2), (- 2, 5), (2, 7), (5, 1) y (2, - 4)

1.6. *Coordenadas de un punto P que divide a un segmento AB en una razón dada*.

RAZON: Es la expresión matemática que significa una división o cociente indicado entre dos cantidades expresadas en las mismas unidades.

Para este tema significa que es el cociente planteado entre la medida de dos segmentos, *expresados en las mismas unidades*.

Si se tienen tres puntos ubicados en el mismo plano P_1, P_2 y P, Siendo P_1 y P_2 los extremos del segmento y P un punto que divide a dicho segmento en una razón "r" dada.

(Hacer grafica)

Al proyectar los tres puntos sobre el eje de las abscisas y plantear la razón entre la medida de sus segmentos, se obtiene:

$$r = \frac{\overline{P_1\ P}}{\overline{P\ P_2}}$$

De la geometría plana se sabe que, las rectas paralelas al eje "y" que se trazan interceptan sobre el eje "x", segmentos proporcionales.

Por lo que se puede escribir:

$$r = \frac{\overline{P_1\ P}}{\overline{P\ P_2}}$$
$$= \frac{\overline{A_1\ A}}{\overline{A\ A_2}}$$

Pero: $\overline{A_1\ A} = x - x_1$, y $\overline{A\ A_2} = x_2 - x$

Luego: $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

Al despejar "x" de la ecuación anterior se tiene:

$$r x_2 - r x = x - x_1$$
$$x\ (1 - r) = x_1 + r x_2$$
$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$
$$r \neq -1$$

Por un procedimiento similar, se obtiene la expresión:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{1 + r}$$

$y \neq -1$ ojo Agregar (,r) en y

$r \neq -1$

Las formulas anteriores permiten calcular las coordenadas del punto $P\ (x, y)$ que divide al segmento $P_1 P_2$ en la razón dada "r".

En el caso particular en que "P" es el punto medio del segmento dirigido $P_1 P_2$, el valor de $r = 1$, si se sustituye este valor en las formulas anteriores, se obtiene:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Formulas o expresiones que nos permiten calcular las coordenadas del ***punto medio***.

EJEMPLO 43.1

Hallar las coordenadas de un punto P (x, y) que divida al segmento determinado por los puntos P_1 (1, 7) y P_2 (6, - 3) en la razón $r = \frac{2}{3}$

Solución: Empleando la formula correspondiente

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{3}(6)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= 3$$

$$y = \frac{y + r y_2}{1 + r}$$

$$= \frac{7 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= 3$$

El punto buscado o solución es P (3, 3)

EJEMPLO 44.1

Calcular las coordenadas de un punto P (x, y) que divida al segmento determinado por P_1 (- 2, 1) y P_2 (3, - 4) en la relación $r = -\frac{8}{3}$; en este caso como la relación es negativa $P_1 P$ y $P P_2$ han de ser de sentido opuesto, debido a lo que el punto "P" será ***"externo"*** al segmento $P_1 P_2$.

$$x = \frac{x_1 + r\,x_2}{1 + r}$$

$$= \frac{-2 + \left(-\frac{8}{3}\right)3}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)}$$

$$= 6$$

$$y = \frac{y_1 + r\,y_2}{1 + r}$$

$$= \frac{7 + \left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)}$$ Cambiar el 7 por 1

$$= -7$$

Luego P (6, -7).

EJEMPLO 45.1

Encontrar el punto medio de los segmentos delimitados por P_1 y P_2, en cada uno de los siguientes casos:

a) (- 4, 5) y (6, - 3)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{-4 + 6}{2}$$

$$= 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$= \frac{5 - 3}{2}$$
$$= 1$$
$$P\ (1,\ 1)$$

b) (8, 3) y (- 3, - 7)

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$= \frac{8 - 3}{2}$$
$$= \frac{5}{2}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$= \frac{3 - 7}{2}$$
$$= -2$$

$$P\ \left(\frac{5}{2},\ -2\right)$$

EJERCICIO 7.1

22. Hallar las coordenadas de un punto P (x, y) que divida al segmento que determinan P_1 y P_2 en la razón "***r***"

a) P_1 (4, - 3), P_2 (1, 4), r = 2

b) P_1 (5, 3), P_2 (- 3, - 3), $r = \frac{1}{3}$

c) P_1 (- 2, 3), P_2 (3, - 2), $r = \frac{2}{5}$

d) P_1 (0, 3), P_2 (7, 4), $r = -\frac{2}{7}$

23. Hallar las coordenadas del baricentro de los triángulos cuyos vértices son: 5, 7), (1, -3) y (- 5, 1)

a) (2, - 1), (6, 7) y (- 4, - 3)

24. Sabiendo que el punto (9, 2), divide al segmento que determinan los puntos P_1 (6, 8) y P_2 (x_2, y_2) en la razón $r = \frac{3}{7}$, hallar las coordenadas de P_2.

25. Hallar las coordenadas de los vértices de un triangulo cuyas coordenadas de los puntos medios de sus lados son O (3, 2), P (- 1, - 2) y Q (5, 4).

26. Ídem que el problema anterior, para los puntos J (- 2, 1), F (5, 2) y G (2, - 3).

27. Los vértices de un triangulo son: R (3, 8), S (2, - 1) y T (6, - 1), calcular la longitud de sus medianas.