UNIDAD V I

DESIGUALDES E INECUACIONES.

OBJETIVO ESPECÍFICO: Al finalizar la unidad el alumno distinguirá la diferencia entre ecuaciones e inecuaciones, y representará en forma gráfica los resultados. Así mismo, empleará las reglas y métodos de solución.

Antecedentes:

A lo largo del curso se han encontrado expresiones llamadas **igualdades** debido a que utilizan el símbolo **"="** (igual que). Así, en la unidad I se habló de las *propiedades de la igualdad* y en la IV se estableció el concepto de *ecuación* como una *igualdad* condicional. Pero, ¿qué pasa si dos cantidades NO son iguales, esto es, sí $a \neq b$? En esta unidad se tratara sobre la respuesta a esta pregunta.

1. *Definición*

1.1 Relación (Propiedad) de tricotomía

Para *entender* el concepto de desigualdad se recurre al principio matemático denominado

PROPIEDAD DE TRICOTOMIA:

Si ***a*** y ***b*** son dos números reales, estos pueden relacionarse entre sí en una y sólo una de las siguientes formas:

$$\boldsymbol{a = b}, \qquad \boldsymbol{a > b}, \qquad \boldsymbol{a < b}.$$

En otras palabras, dos números reales son IGUALES o desiguales entre si. Esto es: el primero es ***igual*** al segundo, el primero es ***mayor*** *que* el segundo o el primero es menor *que* el segundo

.

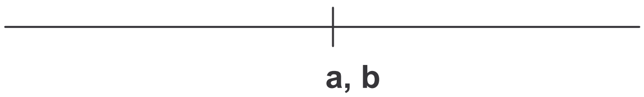
Esta propiedad permite establecer un **orden** dentro del conjunto de los números reales.

Si ***a*** y ***b*** son números reales, significa que ***a*** es menos que ***b***, si ***b - a*** es positivo. Se denota este orden por la desigualdad:

$$\boldsymbol{a < b}$$

1.2 Significado de =, < y > en grafica.

Se dice que un número es ***IGUAL QUE*** otro si al situarse en una recta numérica el primero y el segundo están en la misma posición:



a = b. (*a* es igual que *b*)

Se dice que un número es ***MAYOR QUE*** otro si al situarse en una recta numérica el primero esta a la **derecha** del segundo:

a > b. (*a* es mayor que *b*)

Así mismo un número es ***MENOR QUE*** otro si al ubicarse en una recta numérica el primero está a la **izquierda** del segundo:

a < b. (*a* es menor que *b*)

De las definiciones anteriores se concluye:

a) Si ***a*** y ***b***, son números ***positivos*** o ***negativos*** iguales, se ubican en la misma posición, por lo tanto ***a = b***

b) Si ***a*** es un *número* ***positivo***, se ubica a la derecha del cero, por lo tanto ***a > 0***;

y

c) Si ***a*** es un número ***negativo*** se encuentra a la izquierda del cero entonces: ***a < 0***.

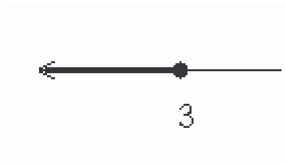
Es conveniente aclarar que si bien es cierto que ***a < b*** implica que ***b > a,*** para evitar confusiones se debe recordar que en nuestro idioma leemos de izquierda a derecha y que al hacerlo de esta forma estamos comparando el primer número con el segundo, ***en ese orden*.**

Así la expresión ***5 > 3*** se lee "cinco es mayor que tres".

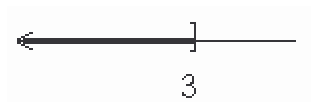
Interpretación de una desigualdad:

Ejemplo 6.1

a) La desigualdad $x \leq 3$ significa que se toman o satisfacen a la desigualdad todos los números reales menores o igual a **3** como se muestra en la grafica siguiente:

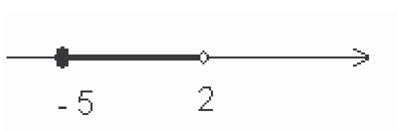


Existe otra forma de representar la grafica anterior utilizando paréntesis ( ) en el punto de la recta lo que significa que el punto no se toma en cuenta o los paréntesis [ ] que indican que el valor se toma en cuenta, el ejemplo anterior será:

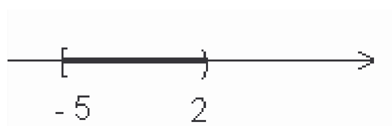


b) la desigualdad $-5 \leq x < 2$, significa que $x \geq -5$ y que $x < 2$. La doble desigualdad significa que están los números comprendidos entre – 5 y 2 incluyendo – 5 ***sin*** incluir al 2

En los dos tipos de graficas:



O utilizando paréntesis:



EJERCICIO 6.1

En las siguientes expresiones, describa verbalmente el conjunto de números reales que representan la desigualdad:

446. $x \leq 7$
447. $x \geq 2$
448. $0 \leq x \leq 4$
449. $-2 \leq x < 1$
450. $3 < x$

EJERCICIO 6.2

En cada una de las expresiones siguientes, escribe el signo **<** o **>** según corresponda entre los dos valores.

451. -10 ___ 0
452. 4 ___ -8
453. 15 ___ 9
454. 0 ___ -6
455. -8 ___ -12
456. $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{2}{3}$
457. $\frac{1}{x}$ ___ $\frac{1}{x+1}$, para $x > 0$.
458. $a + 1$ ___ $a - 3$, para $a \in R$
459. $\frac{w}{2}$ ___ $\frac{w+1}{2}$, $w < -1$
460. $m^2 - n^2$ ___ $(m - n)^2$, $m > n$.

1.3 Desigualdad Absoluta y Desigualdad Condicional.

Una desigualdad que se establece entre dos cantidades de tal forma que **siempre** es válida se denomina ***ABSOLUTA***.

Ejemplo 6.2:

$$5 > 0, \ -10 < 2$$

Cuando una desigualdad contiene literales o variables, la desigualdad se cumplirá o no **dependiendo** de los valores que tomen las variables y a este tipo de desigualdad se le da el nombre de ***CONDICIONAL***.

Ejemplo 6.3

$\mathbf{x + 1 > 4}$ sólo es válida cuando la variable x toma valores mayores que 3, ($\boldsymbol{x > 3}$).

Existen desigualdades que aun conteniendo literales presentan una estructura tal que siempre se cumplen, sin importar el valor que tome la variable. Estas desigualdades se consideran también **absolutas**.

Ejemplo 6.4

$(x - 4)^2 \geq 0$, en donde no importa que valor tome *x*, el resultado dentro del paréntesis se eleva al cuadrado y siempre es positivo o cero.

2. *Inecuaciones:*

2.1 Definición

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Los elementos de cada lado de la *desigualdad* reciben el nombre de miembro de la inecuación primero y segundo respectivamente, al igual que en las igualdades

$$\underbrace{7x - 4}_{\text{PRIMER MIEMBRO}} \neq \underbrace{x + 8}_{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

Ejemplo 6.5

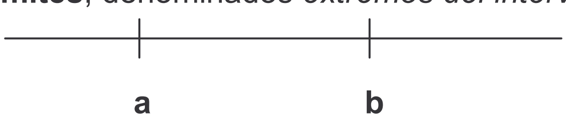
a) $6x - 7 \leq 11(2x + 6)$ Desigualdad de primer grado con una variable

b) $5x^2 + + 3x < 0$ Desigualdad cuadrática.

Pero, a diferencia de las ecuaciones en donde el resultado era uno o dos valores (dependiendo del tipo de ecuación) en las inecuaciones el resultado es un grupo de valores al que se le llama **intervalo solución.**

2.2 *Interpretación*.

Se da el nombre de ***INTERVALO*** al conjunto de valores dentro de dos valores fijos o **límites**, denominados *extremos del intervalo*. Así, si ***a*** y ***b*** son los extremos:



Representa el intervalo ***a***, ***b***.

Un intervalo puede ser ABIERTO, CERRADO o SEMIABIERTO (SEMICERRADO).

Ejemplo 6.6

a) ***INTERVALO ABIERTO*** es aquél en el que la variable puede tomar cualquier valor **dentro** del intervalo, pero NO los límites.

Se puede representar de las siguientes formas: ***(a; b),*** ***a < x < b***.

b) ***INTERVALO CERRADO*** es en el que la variable, además de tomar cualquier valor **dentro** del intervalo, también puede tomar el valor de los **limites**.

Se representa: $a \leq x \leq b$, $[a; b]$.

c) ***INTERVALO SEMIABIERTO o SEMICERRADO*** es aquél en el que la variable puede tomar cualquier valor dentro del intervalo y **alguno** de los extremos, pero **NO AMBOS**.

Se representa: $a < x \leq b$, $(a; b]$; $a \leq x < b$, $[a; b)$.

2.3 *Propiedades de las desigualdades.*

a) Propiedad transitiva: si a, b y c son tres números reales tal que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

b) Propiedad aditiva: si a, b y c son tres números reales tales que $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

c) Propiedad multiplicativa

1: si a, b y c son tres números reales tal que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

2: si a, b y c son tres números reales tal que $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Las propiedades antes señaladas también son válidas para expresiones de la forma:

$a \geq b$, que se lee "*a* **mayor o igual que** *b*; y

$a \leq b$, que se lee "*a* **menor o igual que** *b*".

A continuación se consideran proposiciones con desigualdades que no tienen soluciones evidentes. Por ejemplo intente adivinar (con números reales) de la expresión:

$$8(x + 3) + 3 < 2x - (x + 5)$$

Cuando se resolvieron ecuaciones en secciones anteriores, se aplicaron las propiedades de adición, sustracción, multiplicación y división, de las igualdades. A continuación se aplicaran propiedades parecidas para resolver inecuaciones las que se concentran de la siguiente forma:

Si ***a***, ***b*** y ***c*** son números reales, y ***a* < *b***, entonces:

1. $a + c < b + c$	No se altera el signo de la desigualdad
2. $a - c < b - c$	No se altera el signo de la desigualdad
3. $c\,a < c\,b$ si c es positivo	No se altera el signo de la desigualdad
4. $c\,a > c\,b$ si c es negativo	Se invierte el sentido de la desigualdad
5. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ si c es positivo	No se altera el signo de la desigualdad
6. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ si c es negativo	Se invierte el sentido de la desigualdad

Se concluye que el sentido de la desigualdad se invierte solo cuando se multiplica o divide por un número negativo ambos miembros de la desigualdad.

Ejemplo 6.7

Se utilizaran números reales:

$$5 < 9$$

al multiplicar por - 2

a) Si: $5(-2) < 9(-2)$

$$-10 > -18$$

se cambia el sentido del signo

$$10 > 4$$

al dividir entre - 2

b) Si $\frac{10}{-2} > \frac{4}{-2}$

$$-5 < -2$$

se cambia el sentido del signo

Ejemplo 6.8

a) Si $x > 3$ y $w > x$ por la propiedad transitiva $w > 3$.

b) Si $5 < 11$ $\therefore$ $5 + x < 11 + x$, por la propiedad aditiva.

c) Si $Z \geq 5$ $\therefore$ $3Z \geq 15$, por la propiedad multiplicativa 1 (3 > 0)

d) Si $10 < 15 \therefore -20 > -30$, por la propiedad multiplicativa 2 ($-2 < 0$)

2.4 Resolución de desigualdades en una variable.

Al igual que en las ecuaciones, para resolver una inecuación es necesario despejar la incógnita, para lo cual se utilizan las cuatro propiedades de las desigualdades antes vistas. Recuerde que el resultado es *un conjunto de valores* al que se le da el nombre de intervalo solución.

Ejemplo 6.9

a) Resolver: $2x – 3 < x – 1$.

Para tener los términos en la variable de un solo lado de la desigualdad y poder reducir, se aplica la propiedad 1 restando "x" en ambos miembros

$2x – 3 – x < x – x – 1$, reduciendo términos semejantes:

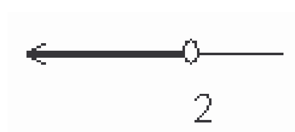
$x – 3 < – 1$, sumando 3 en ambos lados:

$x – 3 + 3 < – 1 + 3$, finalmente, reduciendo:

$\mathbf{x < 2}$.

El conjunto solución esta formado por todos los números reales menores que - 2. La notación de intervalo para este conjunto de solución es $(- \infty, \ 2)$. La grafica de este conjunto es la siguiente.

En forma grafica la solución se representa:



Comprobar el conjunto solución de una desigualdad no es tan fácil y sencillo como el de las ecuaciones. Se sugiere tomar valores enteros inmediatos superiores o inferiores a la solución. En este caso serán 3 y 1.

Comprobación:

$$2x - 3 < x - 1$$
$$2(1) - 3 < (1) - 1$$
$$2 - 3 < 1 - 1$$
$$-1 < 0$$

Este valor ***si*** satisface la inecuación.

$$2(3) - 3 < (3) - 1$$
$$6 - 3 < 3 - 1$$
$$3 \neq 2$$

Este valor ***no*** satisface la inecuación.

b) Resolver: $2\left(\frac{x}{3} - 8\right) \geq 5\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

En este caso es necesario comenzar por la propiedad distributiva:

$$\frac{2x}{3} - 16 \geq \frac{5x}{2} - 5; \quad \text{multiplicando ambos miembros por 6}$$

$$6\left(\frac{2x}{3} - 16\right) \geq 6\left(\frac{5x}{2} - 5\right) \quad \text{No cambia el signo de la desigualdad}$$

$$4x - 96 \geq 15x - 30, \quad \text{aplicando nuevamente la propiedad aditiva}$$

$$4x - 15x - 96 \geq 15x - 15x - 30$$

$$-11x - 96 + 96 \geq -30 + 96$$

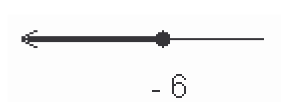
$$-11x \geq -66, \quad \text{dividiendo ambos miembros por } -11$$

$$\frac{-11x}{-11} \geq \frac{-66}{-11}$$

$$\mathbf{x \leq -6}. \quad \text{Cambia el sentido del signo}$$

El conjunto solución esta formado por todos los números reales menores o iguales que - 6. La notación de intervalo para este conjunto de solución es (- ∝, - 6). La grafica de este conjunto es la siguiente.

En forma grafica la solución se representa:



Comprobación: los puntos a considera serán - 5, - 6 y - 7

$$2\left(\frac{-5}{3}-8\right) \geq 5\left(\frac{-5}{2}-1\right)$$

$$2\left(\frac{-5-24}{3}\right) \geq 5\left(\frac{-5-2}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{-29}{3}\right) \geq 5\left(\frac{-7}{2}\right)$$

$$\frac{-48}{3} \geq -\frac{35}{2}$$

$$-16 \neq -17-\frac{1}{2}$$

No se satisface la inecuación con el valor -5

$$2\left(\frac{-6}{3}-8\right) \geq 5\left(\frac{-6}{2}-1\right)$$

$$-20 \equiv -20$$

Si se satisface la igualdad con el valor -6.

$$2\left(\frac{-7}{3}-8\right) \geq 5\left(\frac{-7}{2}-1\right)$$

$$2\left(\frac{-7-24}{3}\right) \geq 5\left(\frac{-7-2}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{-31}{3}\right) \geq 5\left(\frac{-9}{2}\right)$$

$$-\frac{62}{3} \geq -\frac{45}{2}$$

$$-20-\frac{2}{3} > -22-\frac{1}{2}$$

Si se satisface la desigualdad con el valor -7

EJERCICIO 6.2.

Resuelva y represente gráficamente las siguientes inecuaciones:

461. $x+7>2$
462. $5-9y\le 2-8y$
463. $5(12-3w)\ge 15(w+4)$
464. $8a-5>\dfrac{15a-8}{2}$
465. $\dfrac{x+66}{60}>\dfrac{x}{5}$
466. $\dfrac{1}{2}(t+5)\le\dfrac{1}{5}(3+t)$
467. $-\dfrac{x}{4}-\dfrac{3x}{8}+2<\dfrac{3-x}{6}$
468. $\dfrac{x+3}{5}\ge 6(x-4)+7$
469. $(4-y)^2+3y^2<5+(2y-1)^2$
470. $(x+2)(x-5)\le(x-3)^2$
471. $-2 < -5 - 7x \le 19$
472. $30 \le \dfrac{5}{9}(F - 32) \le 40$

2.5 *Cuadráticas.*

Al igual que en las ecuaciones se vieron las lineales y las cuadráticas, en las inecuaciones también se ven.

Para resolver la desigualdad:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

Se utiliza el hecho de que un polinomio puede cambiar de signos solo en sus ceros. Ya que entre dos ceros consecutivos una inecuación debe ser solo positiva o solo negativa. Esto es que cuando los ceros reales de la ecuación se ponen en orden, dividen la recta numérica en intervalos en los que no hay cambios de signo. De los ceros a los que nos referimos son los ***números críticos*** de la desigualdad, y los intervalos resultantes son los ***intervalos de prueba*** para la desigualdad.

Ejemplo 6.10

Encontrar el o los intervalos en que se cumpla la desigualdad

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

Inicialmente se factoriza la cuadrática como:

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

Los números críticos ocurren en:

$$x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 5$$

Los tres intervalos de prueba son:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 5) \quad y \quad (5, \infty)$$

Para determinar los intervalos en los que los valores de la inecuación son enteramente positivos o enteramente negativos, se sugiere seguir los pasos siguientes:

a) Se encuentran los ceros reales de la inecuación y se ordenan en forma creciente. Siendo ellos sus ***números críticos***.
b) Se utilizan estos números para determinar los ***intervalos de prueba***.
c) Se selecciona un valor para "x" representativo en cada intervalo de prueba y se evalúa la inecuación.
d) Si el resultado es negativo, la inecuación tendrá valores negativos para toda "x" en el intervalo.
e) Si es positivo, la inecuación tendrá valores positivos para toda "x" en el intervalo.

Se prueban los intervalos:

a) $(-\infty, -2)$ $\quad x = -3$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$(-3)^2 - 3(-3) - 10 = 0$$
$$9 + 9 - 10 = 8$$

Conclusión: El polinomio es positivo.

b) $(-2, 5)$ $\quad x = 0$

$$(0)^2 - 3(0) - 10 = 0$$
$$0 - 0 - 10 = -10$$

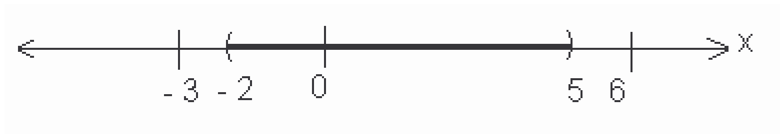
Conclusión: El polinomio es negativo.

c) $(5, \infty)$ $\quad x = 6$

$$(6)^2 - 3(6) - 10 = 0$$
$$36 - 18 - 10 = 8$$

Conclusión el polinomio es positivo.

El polinomio tiene valores negativos para toda “x” en el intervalo (- 2, 5) Este resultado se muestra gráficamente:



METODOLOGIA

La parte teórica del curso será expuesta por el profesor con algunas investigaciones por parte del alumno. Los aspectos prácticos serán cubiertos por el alumno con ejercicios en cada una de las unidades como un medio de medir el conocimiento, comprensión, aplicación y análisis de los conceptos.

CRITERIOS DE EVALUACION

Se realizaran exámenes al termino de cada unidad, debiendo el alumno acreditar todos con una calificación mínima de 6 (seis).

Al finalizar el curso si aprobó todas las unidades, la calificación final será el promedio aritmético.

Si reprueba una o dos unidades máximo tendrá oportunidad de acreditarla (s) en examen de recuperación dos unidades.

En caso de ser mas de dos unidades o reprobar alguna en recuperación para acreditar la materia el alumno podrá presentar un examen extraordinario en el periodo establecido para ello el que contendrá TODAS las unidades del programa.

BIBLIOGRAFIA

1. O'DAFFER, Phares G. *et. Al.,* 1998 *Introducción al Algebra,* Prentice Hall; México.
2. LARSON/HOSTETLER, 1999. *Algebra.* Publicaciones Cultural, México.
3. LEITHOLD, *Louis,* 2003. *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Oxford, University Press; México.
4. FULLER, G. 1999. *Algebra Elemental.* Editorial C.E.C.S.A., México.
5. LOVAGLIA, Florence M. 1992 *Algebra.* Harla México.
6. BALDOR, Aurelio 2001. *Algebra.* Publicaciones Cultural S.A. de C.V.; México.
7. SMITH STANLEYA A., 1998 *Algebra Trigonometría y Geometría Analítica.;* Adison Wesley Logman de México S.A. de C.V.
8. OTEYZA DE OTEYZA, Elena de 1996. *Algebra.* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. Primera Edición. México.