UNIDAD V

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

OBJETIVO ESPECIFICO.

Al fin de la unidad el educando aprenderá las propiedades de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado y las irracionales con una incógnita, así como la forma de resolverlas. Aplicará los conocimientos adquiridos a la solución de problemas de la vida cotidiana.

1. *Raíces*.

1.1 Definición:

La ***potenciación*** se define como una multiplicación de factores iguales, esto es, si $a \in Z$, entonces…

$$\underbrace{a * a * a * a * a \ldots = a^n}$$

$$\mathbf{-5^2 \neq (-5)^2}$$

Lo anterior debe interpretarse como:

$$\mathbf{-5^2 = -(5 * 5) \quad y \quad (-5)^2 = (-5)(-5)}$$

Es un error muy frecuente es considerar que son iguales las expresiones anteriores.

Raíz: para un número natural "**n**". **a** es una raíz n-esima de "**b**", es el número *si solo si* $a^n = b$,

1.2. *Raíz cuadrada*.

El símbolo $\sqrt{}$, llamado **radical**, se usa para indicar la raíz cuadrada de un número.

Cada número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa de acuerdo a la definición de potenciación:

Ejemplo 5.1

El número **81** tiene como raíces a **8** y **- 8**, ya que:

$$(8)^2 = (8)\ (8) = 64 \quad y$$
$$(-8) = (-8)(-8) = 64$$

1.3. *Raíz imaginaria*.

No existen dos números iguales tales que al multiplicarse den como resultado - 81.

A la expresión $\sqrt{-81}$, por no existir solución se le da el nombre de ***raíz imaginaria***, y se representa con la letra minúscula "**i**".

1.4. *Raíz de una potencia*.

Propiedades de los exponentes :

Para "m" y "n", enteros positivos

1.- $a^m a^n = a^{m+n}$

2.- $(a^n)^m = a^{mn}$

3.- $(ab)^m = a^m b^m$

4.- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

5.- $\frac{a^m}{b^m} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m \end{cases}$

De acuerdo a lo anterior si se desea obtener la raíz cuadrada de 2^6, se representa de la siguiente forma:

$$\sqrt[2]{(2)^6} = (2)^{\frac{6}{2}} = (2)^3 = 8$$

En forma general:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

EJERCICIO 5.1

Encontrar el resultado de cada una de las operaciones siguientes:

361. $\sqrt{25}$
362. $\sqrt{121}$
363. $\sqrt{729}$
364. $\sqrt{a^4}$
365. $-\sqrt{25}$
366. $\sqrt{-25}$
367. $8^{\frac{2}{3}}$
368. $(-8)^{\frac{5}{3}}$
369. $\left(5y^{\frac{1}{3}}\right)\left(7y^{\frac{1}{2}}\right)$
370. $\left(2a^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{-2}{3}}\right)^3$

371. $\left(\dfrac{4m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) *Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.*

2.1 *Definición*.

El grado de una ecuación o un sistema de ecuaciones lo determina el exponente máximo que afecta la incógnita.

Una ecuación de ***segundo grado*** o ***cuadrática*** es aquella que después de efectuar las operaciones indicadas y de haber efectuado las reducciones o simplificaciones posibles y de pasar a uno de los dos miembros todos los elementos e igualarla a cero, el ***exponente mayor es dos***.

La forma general de una ecuación de segundo grado o cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En donde:

a = coeficiente de la variable al cuadrado.
b = coeficiente de la variable lineal.
c = termino independiente.

2.2 *Clasificación*.

Las ecuaciones de segundo grado pueden presentar dos formas:

- Completas
- incompletas

Las ***completas*** son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde "*a*", "*b*" y "*c*" son ***diferentes de cero.***

Ejemplo 5.1

$$3x^2 + 5x - 10 = 0 \quad y$$
$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

Son ecuaciones completas de segundo grado.

Las incompletas son ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ (ecuación ***cuadrática pura***) o de la forma $ax^2 + bx = 0$ (ecuación ***cuadrática mixta***).

Ejemplo 5.2

$$5x^2 - 45 = 0 \quad y$$
$$8x^2 - 5x = 0$$

Son ecuaciones incompletas de segundo grado.

Para resolver una ecuación de segundo grado se pueden emplear cualquiera de los siguientes métodos:

- ✓ Despejando la incógnita.
- ✓ Por factorización.
- ✓ Utilizando la formula general.

Las ecuaciones incompletas es posible resolverlas sin necesidad de emplear la formula general, ya que solamente se hace el despeje, como se vera mas adelante.

2.3 *Representación gráfica*.

Al igual que la representación grafica de una ecuación de primer grado que es una línea recta, al representar gráficamente una ecuación de segundo grado no siempre será igual, aunque todas las graficas que se obtengan pertenecen a la familia de las cónicas.

La ecuación cuadrática hasta el momento solo esta afectada por una variable o incógnita, y se hace necesario conocer dos variables para localizar puntos en un plano cartesiano, y que una de ellas este en función de la otra, tomando la ecuación propuesta en función de la variable "y", esto es:

$$f(x) = y$$

La variable se obtiene mediante una tabulacion, dando valores arbitrarios a la independiente (se sugiere sean simétricos), esto es que para cada valor de la variable independiente deberá calcularse el correspondiente a la dependiente.

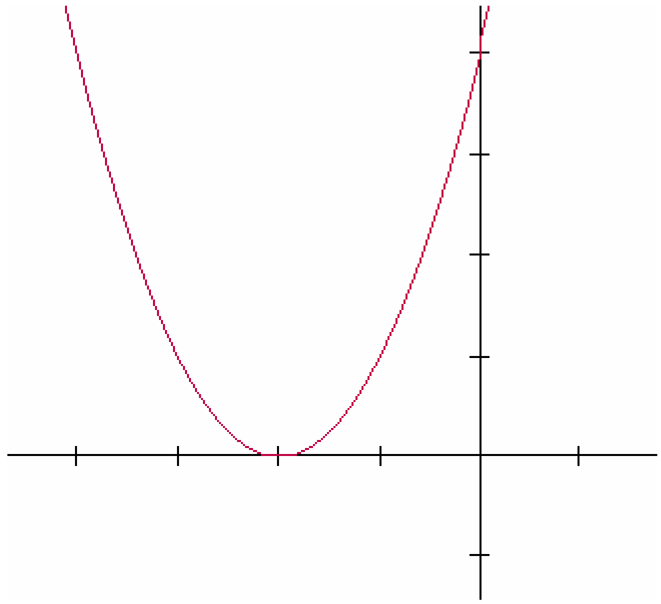
Ejemplo 5.3

Graficar la ecuación: $f(y) = x^2 + 4x + 4$

Se tabula asignando valores arbitrarios a "x" para obtener el complemento del par ordenado "y"

Valor asignado	x	-3	-2	-1	0	1	2
Valor calculado	y	1	0	1	4	6	9

Al tener los pares ordenados se ubican en el plano cartesiano y se obtiene la grafica:



La grafica es una parábola en donde se confirma un axioma de geometría analítica que se vera en el próximo curso y dice “*toda ecuación de dos variables en la que una de ellas esta elevada al cuadrado su grafica es a una parábola*”.

En la actualidad existe varios software que permiten a quien estudia las ecuaciones cuadráticas, de una forma rápida y cómoda graficarlas con el auxilio de la computadora, por tal motivo, se sugiere utilizarlo para facilitar su comprensión.

Se deja al estudiante resolver algunos problemas por el método grafico con o sin el auxilio de la computadora.

EJERCICIO 5.2

En su cuaderno o en la computadora obtener la grafica de las siguientes ecuaciones:

372. $f(y) = x^2 + 6x - 27$
373. $f(y) = 10x^2 - 11x - 6$
374. $f(y) = x^2 + 10x + 25$
375. $f(x) = 3y^2 + 7y - 21$
376. $f(x) = 10y^2 - 11y - 6$

2.4 Solución de ecuaciones

2.4.1 Forma incompleta pura

Como se menciono anteriormente estas ecuaciones carecen del término elevado a la primera potencia, por lo que simplemente se despeja la incógnita "***x***", por tanto:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + c &= 0 \\
ax^2 &= -c \\
x &= \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}
\end{aligned}
$$

De forma general se dice que este tipo de ecuaciones tiene dos soluciones que corresponden a números simétricos, y, en algunos casos la raíz será imaginaria.

Ejemplo 5.4

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 72 &= 0 \\
x^2 &= \frac{72}{2} \\
x &= \pm\sqrt{36} \\
x &= \pm 6
\end{aligned}
$$

$$\text{Comprobacion con} + 6:$$

$$
\begin{aligned}
2(6)^2 - 72 &= 0 \\
2(36) - 72 &= 0 \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

$$\text{con } -6:$$

a)

$$
\begin{aligned}
2(-6)^2 - 72 &= 0 \\
2(36) - 72 &= 0 \\
0 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
18x^2 + 3 &= 0 \\
18x^2 &= -3 \\
x^2 &= -\frac{3}{18} \\
x &= \sqrt{-\frac{3}{18}} \\
x &= \text{no es un numero real} \\
x &= i
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 5.3:

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado despejando la incógnita:

377. $2x^2 - 18 = 0$
378. $3x^2 - 48 = 0$
379. $5x^2 - 9 = 46$
380. $7x^2 + 14 = 0$
381. $3x^2 - 39 = 36$

2.4.2 Forma incompleta mixta

Esta ecuación no tiene el término independiente "***c***", y el camino o método de solución es la factorización:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx &= 0 \\
x(ax + b) &= 0
\end{aligned}
$$

Para que un producto de factores sea ***cero***, cada factor o uno de ellos al menos deberá ser ***cero***, por tanto, al igualar el primer factor a cero se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x(ax + b) &= 0 \\
x &= \frac{0}{ax + b} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Y al igualar el segundo factor a cero se tiene:

$$x(ax + b) = 0$$

$$ax + b = \frac{0}{x}$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Por lo que las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0 \qquad y$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 5.4

De acuerdo al procedimiento antes descrito encontrar las raíces de:

$$7x^2 + 6x = 0$$

$$x(7x + 6) = 0$$

a) $$x_1 = 0 \qquad y$$

$$7x + 6 = 0$$

$$x_2 = -\frac{6}{7}$$

Comprobación:

$$\text{para } x = 0$$
$$7(0)^2 + 6(0) = 0$$
$$0 + 0 = 0$$
$$0 \equiv 0$$
$$\text{para } x = -\frac{6}{7}$$
$$7\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + 6\left(-\frac{6}{7}\right) = 0$$
$$7\left(\frac{36}{49}\right) - \frac{36}{7} = 0$$
$$\frac{7(36)}{7(7)} - \frac{36}{7} = 0$$
$$0 - 0 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

EJERCICIO 5.4:

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método de factorización:

382. $x^2 - x = 0$
383. $x^2 - x = 0$
384. $x^2 + 7x = 0$
385. $2x^2 - 3x = 0$
386. $x^2 - 36x = 0$
387. $10x^2 - 15x = 0$

2.4.3 Forma completa.

La Forma ***Canónica*** o ***completa*** de una ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde "***a***", "***b***" y "***c***" son números reales.

Para despejar a "x" de la ecuación anterior se utiliza el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, donde primero se aplican las propiedades de las igualdades, se multiplica por ***4a***:

$$4a\,(ax^2 + bx + c = 0)$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

A continuación se suma $\boldsymbol{b^2}$ a ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + \boldsymbol{b^2} + 4ac = \boldsymbol{b^2}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Factorizando el primer miembro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Al extraer raíz cuadrada a ambos miembros, y despejar "x":

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión anterior se llama ***Formula General*** *de la ecuación de segundo grado.*

Algunas Observaciones importantes para aplicar la fórmula general son:

- El coeficiente ***a*** debe ser distinto de 0 para poder dividir entre él. Esto realmente no es problema ya que si el coeficiente a es igual a cero, la ecuación se reduce a una de primer grado.
- La ecuación de segundo grado debe estar igualada a 0.
  Ecuaciones Completas de segundo grado**:**

Se recomienda memorizarla y emplearla para resolver ecuaciones cuadráticas, cuando no den resultado métodos más sencillos.

Al subradical $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ se le denomina **discriminante** y del que se obtiene la información siguiente:

Si el resultado de $b^2 - 4ac$ es:	Al resolver, $ax^2 + bx + c = 0$ tendrá:
Positivo	Dos soluciones reales
Cero	Una solución real
Negativo	Dos soluciones complejas

EJERCICIO 5.5:

Determinar el carácter de las raíces de las ecuaciones siguientes, sin resolverlas.

388. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

389. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

390. $3x^2 - 2x + 5 = 0$
391. $x^2 - 10x + 25 = 0$
392. $2x^2 - 9x + 7 = 0$
393. $4x^2 - 5x + 3 = 0$
394. $5x^2 - 7x + 8 = 0$
395. $x^2 - 10x - 11 = 0$

Ejemplo 5.6

Resolver $2x^2 - 4x = 3$, con auxilio de la formula general:

Se ordena e iguala a cero la ecuación y se identifican a, b y c:

$2x^2 - 4x - 3 = 0$, $a = 2$ $b = -4$ $c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4} \quad \text{al factorizar}$$

$$x = \frac{2(2 \pm \sqrt{10})}{2(2)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

Comprobación:

$$\text{para } x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$2\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right) = 3$$

$$2\left(\frac{4 + 2\sqrt{10} + 10}{4}\right) - 4 - 2\sqrt{10} = 3$$

$$2 + 2\sqrt{10} + 5 - 4 - 2\sqrt{10} = 3$$

$$7 - 4 = 3$$

$$3 \equiv 3$$

$$\text{para } x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$$

$$2\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right) = 3$$

$$2\left(\frac{4 - 2\sqrt{10} + 10}{4}\right) - 4 + 2\sqrt{10} = 3$$

$$2 - 2\sqrt{10} + 5 - 4 + 2\sqrt{10} = 3$$

$$7 - 4 = 3$$

$$3 \equiv 3$$

EJERCICIO 5.6

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones por el método de formula general:

396. $(x+1)^2 - \frac{3}{2} = 0$
397. $(x+2)^2 - \frac{5}{3} = 0$
398. $x^2 - 6x + 8 = 0$
399. $x^2 + 2x - 15 = 0$
400. $x^2 + 10x = 24$
401. $x^2 - 8x + 16 = 0$

Otra forma de solucionar una ecuación completa es utilizando la descomposición en factores.

Para dar solución a una ecuación de segundo grado se descompone la ecuación en dos factores (se factoriza) utilizando los procedimientos estudiados en la unidad 2.

Además, es necesario recordar la propiedad del producto cero, la cual se expresa:

Sean "**a**" y "**b**" números reales. Si **ab** = **0**, entonces **a** = **0** o **b** = **0**

Ejemplo 5.8

a) Resolver mediante descomposición factorial $x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 16$ es una diferencia de cuadrados, entonces:

$$(x-4)(x+4)=0$$

y aplicando la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 - 4 = 0$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 + 4 = 0$$
$$x_2 = -4$$

b) Resolver por el método de descomposición factorial $x^2 - 5x = 0$

En este caso, "x" es un factor común. Entonces:

$$x(x-5)=0$$

Al aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 - 5 = 0$$
$$x_2 = 5$$

c) Resolver por descomposición factorial $x^2 + 10x + 25 = 0$

La expresión es un trinomio cuadrado perfecto, que se factoriza como un binomio al suma al cuadrado:

$$(x+5)^2 = 0$$
$$(x+5)(x+5)=0$$

Al aplicar la propiedad del producto cero se tiene:

$$x_1 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$$
y
$$x_2 + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -5$$

Nota: si la expresión puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto, las dos raíces serán iguales.

d) Resolver por el método de descomposición factorial $x^2 - x - 6 = 0$

La ecuación es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ que se factoriza:

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

Se aplica la propiedad del producto cero y se obtiene:

$$x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$
$$x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

e) Resolver por el método de descomposición factorial $6x^2 + 11x - 10 = 0$

La ecuación es un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, que se factoriza:

$$(3x - 2)(2x + 5) = 0$$

Se aplica la propiedad del producto cero para obtener:

$$3x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$$
$$2x_2 + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$$

Ejemplo 5.9

Resolver las ecuaciones utilizando el método de factorización:

de la forma $x^2 + bx + c$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 2x + 4 = 0$$
$$x(x-2) - 2(x-2) = 0$$
$$(x-2)(x-2) = 0$$
$$(x-2) = 0$$
$$x = 2$$

Comprobación:

$$(2)^2 - 4(2) + 4 = 0$$
$$4 - 8 + 4 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

de la forma $ax^2 + bx + c$

$$2x^2 - 6x - 8 = 0$$
$$2x^2 - 8x + 2x - 8 = 0$$
$$2x(x-4) + 2(x-4) = 0$$
$$(x-4)(2x+2) = 0$$
$$x - 4 = \frac{0}{2x+2}$$
$$x_1 = 4$$
$$2x + 2 = \frac{0}{x-4}$$
$$x_2 = 1$$

Comprobación:

$$2(4)^2 - 6(4) - 8 = 0$$
$$32 - 24 - 8 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

$$2(-1)^2 - 6(-1) - 8 = 0$$
$$2 + 6 - 8 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

EJERCICIO 5.7

Aplicando el método de factorización resolver las ecuaciones:

402. $9x^2 + 30x + 25 = 0$
403. $6x^2 + x = 1$
404. $4x^2 + 4x = 15$
405. $9x^2 + 4 = 12x$
406. $2x^2 - x = 6$

Solución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto

La expresión $(x + a)^2$ es un binomio al cuadrado. Que se desarrolla:
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

y $x^2 + 2ax + a^2$ es un **Trinomio Cuadrado Perfecto**. (TCP)

Se observa que a^2 es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

El término que al sumarse a una expresión del tipo $x^2 + bx$ y la convierte en un trinomio cuadrado perfecto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

Ejemplo 5.11

Encontrar el término que debe sumarse a $x^2 + 4x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto, y expresar éste en forma factorizada.

Solución: el término faltante es la mitad del coeficiente de x, elevado al cuadrado, así, $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ es el término buscado, entonces, el trinomio cuadrado perfecto resultante es: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

EJERCICIO: 5.8

Encuentre el término que debe sumarse a cada una de las siguientes expresiones para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

407. $x^2 + 6x$
408. $x^2 - 30x$
409. $x^2 + 10x$
410. $x^2 - 9x$
411. $x^2 + \frac{2}{3}x$
412. $x^2 - \frac{4}{5}x$
413. $x^2 - 12x$
414. $x^2 + \frac{1}{2}x$
415. $x^2 + \frac{3}{4}x$

416. $x^2 - \frac{5}{2}x$

Ejemplo 5.12

a) Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Solución.

$x^2 - 5x = -6$, el término que falta para obtener un T.C.P. es:

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, este valor se agrega a ambos miembros de la ecuación y se tiene::

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$, el cual al factorizar el primer miembro resulta:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Al extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación resulta:

$$x-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$$
$$x_1-\frac{5}{2}=+\frac{1}{2}$$
$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$$
$$x_1=\frac{6}{2}$$
$$x_1=3$$
$$x_2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{4}{2}$$
$$x_2=2$$

b) Resolver $2x^2+3x-2=0$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Solución: Se observa que el coeficiente de x^2 es diferente de 1, entonces se divide toda la ecuación entre 2.

$$\frac{2x^2+3x-2}{2}=\frac{0}{2}$$
$$x^2+\frac{3}{2}x-1=0$$
$$x^2+\frac{3}{2}x=1$$

El término que hace falta para completar el trinomio cuadrado perfecto es

$$\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$=\frac{9}{16}$$

Sumando $\frac{9}{16}$ a ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=1+\frac{9}{16}$$

Se factoriza:

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

Al extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación resulta:

$$x+\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{5}{4}$$

Las raíces o soluciones de la ecuación son

$$x_1+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$x_1=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$$

$$x_1=\frac{1}{2}$$

$$x_2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$$

$$x_2=-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$$

$$x_2=-2$$

EJERCICIO 5.9:

Resuelva para x las siguientes ecuaciones completando el trinomio cuadrado perfecto.

417. $x^2 + 2x - 3 = 0$
418. $x^2 - x - 1 = 0$
419. $x^2 + 7x - 6 = 0$
420. $x^2 - 3x - 18 = 0$
421. $x^2 + 14 = 15x$
422. $x^2 = 6x - 9$
423. $3x^2 + 5x = 0$
424. $2x^2 = 7x$
425. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
426. $5x^2 = -13x - 6$
427. $9x^2 = 2 + 3x$
428. $4x^2 + 20x = -25$

3. <u>*Ecuaciones irracionales*</u>.

3.1 *Definición*

.

Una ecuación ***IRRACIONAL*** es toda ecuación cuya incógnita está contenida dentro de un radical:

$2\sqrt{x} - 8 = 0,$ $\sqrt{x-6} = 5,$ $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 9} = 7$

Los radicales tienen propiedades particulares. Por lo pronto, basta con saber que la ***potenciación*** y la ***radicación*** son operaciones inversas y, por lo tanto, para eliminar una raíz cuadrada basta con elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

Como se ha podido observar a lo largo de toda la presente unidad, para resolver una ecuación es necesario despejar la incógnita y en este caso es necesario primeramente eliminar el radical.

3.2 *Solución*

Al resolver y analizar los ejemplos siguientes, se tendrá una guía para solucionar este tipo de ecuaciones:

Ejemplo: 5. 13

a) Resolver: $2\sqrt{x} - 8 = 0,$

Se despeja el radical: $2\sqrt{x} - 8 = 0,$

$2\sqrt{x} = 8$ PROPIEDAD DE INVERSOS SUMA.

$\sqrt{x} = \frac{8}{2}$ PROPIEDAD DE INVERSOS MULTIPLICACIÓN.

$$\sqrt{x} = 4$$ OPERACIÓN DE DIVISIÓN.

Una vez despejada la raíz se procede a quitarla elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (4)^2$$

y el resultado es $x = 16$.

De la misma forma y como se ha venido haciendo a lo largo de la unidad, es posible efectuar la comprobación de la raíz sustituyendo el valor de la incógnita **x** encontrado, en la ecuación original:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} - 8 &= 0 \\ 2\sqrt{16} - 8 &= 0 \\ 2(4) - 8 &= 0 \\ 8 - 8 &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

NOTA: Hay que recordar que cuando se extrae la raíz cuadrada a un número existen dos resultados posibles: uno positivo y otro negativo. Sin embargo observará que en la comprobación anterior sólo se utilizó el resultado positivo. Esto se debe a que de utilizar el resultado negativo **NO** se llegaría a la identidad. En la unidad VI se estudiará esta situación con más detalle, por lo pronto usted debe tomar en cuenta que se estará trabajando únicamente con el resultado positivo de las raíces.

b) Resolver: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} = 2$.

En el ejemplo existen dos raíces por lo que para eliminar los radicales es preciso dejar en un miembro solo uno y después elevar al cuadrado ambos miembros:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1} &= 2 \\ \sqrt{3x+1} &= 2 - \sqrt{x+1} \\ (\sqrt{3x+1})^2 &= (2 - \sqrt{x+1})^2 \end{aligned}$$

Se observa que en el segundo miembro de la ecuación se tiene un binomio al cuadrado, por lo que recordando productos notables de la primera unidad de este curso se obtiene al desarrollarlo:

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 4 - 4\sqrt{x+1} + (-\sqrt{x+1})^2 \\ 3x + 1 &= 4 - 4\sqrt{x+1} + x + 1 \\ 3x + 1 &= 5 + x - 4\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

Ahora, se procede a quitar el otro radica, dejando solo al termino que lo contieno:

$$4\sqrt{x+1} = 5 + x - 3x - 1$$
$$4\sqrt{x+1} = 4 - 2x$$
$$(4\sqrt{x+1})^2 = (4-2x)^2$$
$$16(x+1) = 16 - 16x + 4x^2$$
$$16x + 16 - 16 + 16x - 4x^2 = 0$$
$$32x - 4x^2 = 0$$

La última expresión corresponde a una ecuación de segundo grado incompleta mixta. Que al resolverla:

$$\begin{aligned} 32x - 4x^2 &= 0 \\ 4x(8-x) &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 8 - x &= 0 \\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.10

Resolver y comprobar las ecuaciones irracionales siguientes.

429. $\sqrt{5x-1} = 7$

430. $\sqrt{7y+1} - 5 = 3$

431. $\sqrt{\dfrac{2x^2-18}{2}} = x - 1$

432. $x + \sqrt{x} - 20 = 0$

433. $\sqrt{x} + 2 = \sqrt{x+12}$

434. $\sqrt{x+2} - \sqrt{16-x} = 0$

435. $\sqrt{x+10} - \sqrt{x} - 2 = 0$

436. $\sqrt{w} + \sqrt{w+1} = \sqrt{2w+1}$

437. $\sqrt{m-3} = \sqrt{3m+1} - \sqrt{2m+4}$

438. $\sqrt{-2+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x+4}}}} = 1$

- APLICACIONES.

Al igual que en las ecuaciones de primer grado y los sistemas de ecuaciones, existe un gran número de problemas cuyo planteamiento y resolución se relacionan con ecuaciones de segundo grado y/o ecuaciones irracionales.

De la misma forma que se abordaron en su momento el otro tipo de problemas, así también puede encontrarse la solución de estos; con la diferencia de que aquí se tiene que considerar el contexto del problema para aceptar o rechazar la solución de la ecuación resultante como solución del problema. A continuación se dan ejemplos.

a) Hallar un número tal que sumado con su cuadrado dé 2550.

Sea ***x*** el número buscado.
Entonces su cuadrado será $\boldsymbol{x^2}$.
Y según el enunciado: $x + x^2 = 2550$.
Reordenando e igualando a cero: $x^2 + x - 2550 = 0$.
Esta última expresión corresponde a una ecuación de segundo grado completa que se puede resolver mediante cualquiera de los métodos vistos:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2550 &= 0 \\ (x - 50)(x + 51) &= 0 \\ x_1 &= 50 \\ x_2 &= -51 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 50 + (50)^2 - 2550 &= 0 \\ 50 + 2500 - 2550 &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -51 + (-51)^2 - 2550 &= 0 \\ -51 + 2601 - 2550 &= 0 \\ 0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Las dos soluciones son verdaderas

b) Un campo rectangular es tal que su longitud es el triple de la anchura. Si se aumenta la longitud en 20 m y la anchura en 8 m, el área se triplica. ¿Cuál es la superficie del campo?

Si se designa por ***a*** al ancho, entonces, según el propio problema:

Ancho original = ***w***,
Longitud original = ***3w***,
Área original = $S = (w)(3w)$,
Ancho modificado = $w + 8$,
Longitud modificada = $3w + 20$,
Área modificada = $S' = (w + 8)(3w + 20)$;
Pero cómo $S' = 3S$, $(w + 8)(3w + 20) = 3(w)(3w)$.
Efectuando operaciones: $3w^2 + 44w + 160 = 9w^2$
Igualando a cero, simplificando y reordenando:

$$3w^2 - 22w - 80 = 0.$$

Por factorización: $(w - 10)(3w + 8) = 0$

Al despejar $w_1 = 10,$ $w_2 = -\frac{8}{3}$.

Dado que tanto el ancho como la longitud son cantidades positivas, la segunda raíz, aunque es un resultado correcto de la ecuación ***NO*** es un resultado válido para el contexto del problema por lo que el resultado es:

Anchura: 10 metros,
Longitud: 30 metros $S = (10)(30) = 300\ m^2$.

c) ¿Cuál es el número que disminuido en su raíz cuadrada da 3660?

Está claro que al hablar de raíz cuadrada el resultado buscado debe ser positivo, por lo que sí *p* es el número buscado y según el enunciado:

$$p - \sqrt{p} = 3660$$

Esta expresión corresponde a una ecuación irracional, la cual se puede resolver como se describió en el apartado anterior:

$$\sqrt{p} = p - 3660$$
$$(\sqrt{p})^2 = (p - 3660)^2$$
$$p = p^2 - 7320p + 13395600$$

Al igualar a cero, se resuelve por formula general:

$$p^2 - 7321p - 13395600 = 0$$
$$p = \frac{7321 \pm \sqrt{53597041 - 53582400}}{2}$$
$$p = \frac{7321 \pm 121}{2}$$
$$p_1 = 3721$$
$$p_2 = 3600$$

Si se prueba con 3721 cuya raíz cuadrada es 61, se tiene:

$$3721 - 61 = 3660$$

Y con 3600 cuya raíz cuadrada es 60

$$3600 - 61 = 3540$$

Con lo que el segundo resultado ***no*** satisface las condiciones del problema.

EJERCICIO 5.11.

439. Si se resta cierto número de su cuadrado el resultado es 30. ¿Cuál es ese número?
440. Si del cuadrado de la edad de Adrián se resta el producto de su edad por 12, se obtiene 108. ¿Cuál es la edad de Adrián?
441. El producto de dos enteros positivos impares consecutivos es 143. Encuentre los enteros impares.
442. La suma de las edades de Rodrigo y de Emmanuel es 23 años y su producto 102. ¿Qué edad tiene cada uno?
443. El largo de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si el largo se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se duplica. Hallar las dimensiones del terreno.
444. La suma de un numero mas su reciproco es $\frac{26}{5}$. Encuentre el número.

En física I se demostrara la formula cuando un objeto cae o es lanzado hacia arriba verticalmente en donde "v" es la velocidad en $\frac{\text{mts}}{\text{seg}}$ con que es lanzado el proyectil, "d" el espacio o distancia que recorre en "mts.", "t" el tiempo en que se desarrolla el evento y "g" la gravedad cuyo valor es 9.8 $\frac{\text{mts}}{\text{seg}^2}$, y los conceptos anteriores se relacionan con la formula:

$$d = vt \pm \frac{1}{2}gt^2$$

445. Con el auxilio de la formula anterior resolver el siguiente problema: Desde el suelo se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad de 34.3 $\frac{\text{mts}}{\text{seg}}$. ¿dentro de cuanto tiempo estará a 49 metros de altura sobre el suelo?