UNIDAD IV

ECUACIONES

OBJETIVO ESPECIFICO

Al concluir la unidad el alumno identificara las ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas y calculara la solución de este tipo de ecuaciones con una, dos y hasta tres incógnitas. Interpretara y determinara la solución de problemas prácticos planteados en lenguaje cotidiano.

1.- *Definición y solución.*

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Los elementos de cada lado de la igualdad reciben el nombre de *miembro* de la ecuación *primero* y *segundo* respectivamente.

Ejemplo 4.1:

$$\underbrace{7x - 4}_{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \underbrace{x + 8}_{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

Las ecuaciones se clasifican en:

a) **Numérica**: Que en el proceso de solución conduce a un resultado numérico

$$\begin{aligned} 5x &= 3x + 10 \\ 5x - 3x &= 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

b) **Literal:** Aquella en la que el resultado es una expresión algebraica.

$$\begin{aligned} 7x - 5a &= -b + 4x \\ 7x - 4x &= 5a - b \\ 3x &= 5a - b \\ x &= \frac{5a - b}{3} \end{aligned}$$

Cuando las ecuaciones iniciales no tienen denominador se llaman **enteras** y las que si se les conoce como **fraccionarias**, por ejemplo:

$4x + 3 = x - 8$ **Entera**

$$\frac{8x}{4}+\frac{4}{3}=x+6$$ **Fraccionaria**

El **grado** de una ecuación esta dado por el valor del exponente mayor de la incógnita, así por ejemplo:

$4x + 3 = x - 8$ ***Primer grado***
$3x^2 + 8x - 3 = 0$ ***Segundo grado***

2. <u>*Ecuaciones de primer grado en una variable*</u>

Una ecuación de <u>*primer*</u> <u>*grado*</u> o <u>*lineal*</u> es aquella en la que todas las incógnitas tienen el exponente igual a *uno*.

La **solución** o **raíz** de una ecuación de primer grado es el valor de una constante que, al reemplazarlo o sustituirlo por la incógnita hace que ambos miembros de la ecuación tengan el mismo valor.

Ejemplo 4.2:

Dada la ecuación $7x - 4 = x + 8$ verificar que ocurre para los valores de "x" = a "**2**" y "**5**".

$$7x - 4 = x + 8$$

Si se sustituye en la ecuación **x = 2**, se tiene:

$$7x - 4 = x + 8$$
$$7(2) - 4 = 2 + 8$$
$$14 - 4 = 2 + 8$$
$$10 = 10$$

Pero si se hace con **x = 5,** se tiene:

$$7x - 4 = x + 8$$
$$7(5) - 4 = 5 + 8$$
$$35 - 4 = 5 + 8$$
$$31 \neq 13$$

Por lo tanto "**2**" es la <u>*raíz*</u> o <u>*solución*</u> de la ecuación.

Una estrategia para resolver una ecuación es la de respetar la prioridad de operaciones, que se vio en la unidad uno. Pero antes de continuar es recomendable recordar brevemente algunas propiedades de las igualdades

Si $a = b$, entonces: $a + c = b + c$ **PROPIEDAD DE ADICIÓN**
Si $a = b$, entonces: $a - c = b - c$ **PROPIEDAD DE LA SUSTRACCIÓN**

Si a = b, entonces: c * a = c * b **PROPIEDAD DE LA MULTIPLICACIÓN**

Si a = b, entonces: $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$ **PROPIEDAD DE LA DIVISIÓN**

Ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen el mismo conjunto solución.

Al resolver una ecuación es necesario cubrir los siguientes pasos:

1° Suprimir los símbolos de agrupación, aplicar las propiedades anteriores y reducir los términos semejantes.

2° Dejar a la incógnita sola (*despejarla*) y con el coeficiente "**+1**", en cualquiera de los dos miembros, con lo cual se genera una serie de ecuaciones equivalentes.

3° Verificar la *raíz* o solución reemplazándola o sustituyéndola en la ecuación original.

Ejemplo 4.3:

a) Resolver

$$5x - [3(2x-5)+5] = 2x+4$$

SUPRIMIR PARÉNTESIS

$$5x - [6x - 15 + 5] = 2x + 4$$

$$5x - 6x + 15 - 5 = 2x + 4$$ **COMBINAR TÉRMINOS SEMEJANTES**

$$-x + 10 = 2x + 4$$

$$-x + 10 - 4 = 2x + 4 - 4$$ **PROPIEDAD DE SUSTRACCIÓN**

$$-x + 6 = 2x$$

$$-x + x + 6 = 2x + x$$ **PROPIEDAD DE ADICIÓN**

$$6 = 3x$$

$$\frac{6}{3} = \frac{3x}{3}$$ **PROPIEDAD DE DIVISIÓN**

$$\mathbf{2 = x}$$ **RAÍZ O SOLUCIÓN**

Es importante verificar siempre la solución de la ecuación, esto se logra reemplazando la raíz en la ecuación original, pero en cualquier paso del procedimiento anterior se deberá *satisfacer* la ecuación dando lugar a una identidad.

A este procedimiento se le da el nombre de *COMPROBACION*, mismo que se recomienda se utilice en todas las ecuaciones de cualquier tipo para verificar la o las raíces de la ecuación

$$5x + \left[3\left(2x-5\right)+5\right] = 2x+4 \qquad \text{Ecuacion}$$
$$5(2) - \left\{3\left[2(2)-5\right]+5\right\} = 2(2)+4 \qquad \text{Igualdades}$$
$$10-\left[3(4-5)+5\right] = 4+4$$
$$10-\left[3(-1)+5\right] = 8$$
$$10-(-3+5) = 8$$
$$10-(2) = 8$$
$$10-2 = 8$$
$$8 \equiv 8 \qquad \text{Identidad}$$

b) Resolver

$$-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x) = (x-3)$$
$$-6x-21-5x+6-8+16x = x-3$$
$$5x-23 = x-3$$
$$5x \mathbf{-x} - 23 = x \mathbf{-x} - 3$$
$$4x-23 \mathbf{+23} = -3 \mathbf{+23}$$
$$4x = 20$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Comprobación

$$-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x) = (x-3)$$
$$-3[2(5)+7]+[-5(5)+6]-8[1-2(5)] = (5-3)$$
$$-3(10+7)+(-25+6)-8(1-10) = (5-3)$$
$$-3(17)+(-19)-8(-9) = 2$$
$$-51-19+72 = 2$$
$$2 \equiv 2$$

c) Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3x}-\frac{5}{x}=\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1$$

$$\frac{2}{3x}-\frac{5}{x} = \frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1 \quad \text{m.c.m. } 30x$$

$$(30x)\left(\frac{2}{3x}-\frac{5}{x} = \frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1\right)$$

$$\begin{aligned}
20-150 &= 21x-45+30x \\
-130 &= 51x-45 \\
-130+45 &= 51x \\
-85 &= 51x \\
\frac{-85}{51} &= x \\
-\frac{(17)(5)}{(17)(3)} &= x \\
-\frac{5}{3} &= x
\end{aligned}$$

Comprobación

$$\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2x} + 1$$

$$\frac{2}{3\left(-\frac{5}{3}\right)} - \frac{5}{-\frac{5}{3}} = \frac{7}{10} - \frac{3}{2\left(-\frac{5}{3}\right)} + 1$$

$$\frac{2}{-\frac{15}{3}} - \frac{5}{-\frac{5}{3}} = \frac{7}{10} - \frac{3}{-\frac{10}{3}} + 1$$

$$30\left(-\frac{6}{15} + \frac{15}{5} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10} + 1\right)$$

$$-12 + 90 = 21 + 27 + 30$$

$$78 \equiv 78$$

EJERCICIO 4.1

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones comprobando el resultado:

291. $6s - (3s - 11) = 47$

292. $(4x + 1) + 8 - (x + 6) = 9$

293. $4x - (x + 4) = x + 2$

294. $2(8 - 3x) = 5 - 4(1 - x)$

295. $4(x - 1) + 2 - (4x + 3)(x - 2) = 2 - 4x^2$

296. $-(x - 2) - (x + 4) - 3 -(x + 3)\,2 = 0$

297. $30x - (-x + 6) + (-5x + 4) = - (5x + 6) + (-8 + 3x)$

298. $15p + (-6p + 5) - 2 - (-p + 3) = - (7p + 23) -p + (3 - 2p)$

299. $(3m - 2) + (3m + 4) - (4m - 4)2 = 6$

300. $(2h + 3)2 - 2 (2h - 3) + h = 4$

301. $5+\frac{g}{6}=\frac{1}{3}-g$

302. $\frac{a}{2}+\frac{a+3}{3}=6$

303. $\frac{2x}{3}-\frac{x}{4}=10$

304. $2+\frac{m}{2}-\frac{m}{12}+\frac{5}{4}=\frac{m}{6}$

305. $\frac{7}{10}-\frac{3}{2x}+1=\frac{2}{5x}-\frac{5}{x}$

306. $\frac{5e}{2}=e-\frac{e+2}{12}$

307. $p=\frac{p}{3}+\frac{p}{5}+7$

308. $\frac{3h-1}{2}-\frac{2h+3}{3}=1$

309. $\frac{x+2}{9}-\frac{x-8}{3}=3$

310. $\frac{10x-6}{30}=\frac{7+6x}{5}-\frac{-6+3x}{15}$

311. $\frac{2x+7}{3x}-\frac{7x+6}{3x}-\frac{2(x-4)}{5x}=\frac{4x-6}{15x}$

312. $\frac{5}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$

313. $\frac{5x+2}{3x-4}=\frac{5x+8}{3x+4}$

314. $\frac{2x-1}{2x+2}-2(x-4)=-2x$

315. $\frac{5x(x-1)}{x^2-3x-4}-2\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2.1 *Aplicaciones*.

Una aplicación inmediata de las ecuaciones es en la solución de problemas planteados con palabras, estos son tantos y tan variados que no existe un método que se pueda aplicar en común a todos, mas sin embargo se puede dar una estrategia que ayudará a organizar el planteamiento.

1) Leer cuidadosamente el problema.
2) Hacer figuras o diagramas en el que señalemos las partes conocidas y desconocidas.
3) A las partes desconocidas identificarlas con una incógnita, y si existen otras trate de representarlas en función de la primera.
4) Diseñar una ecuación que involucre y relacione las cantidades conocidas y desconocidas
5) Resuelve la ecuación y verificarla al final.

Es conveniente ilustrar ciertas frases que pueden ayudar con los problemas verbales esto es que operación me representan, existe un gran número de ellas, solo mostraremos solo algunos ejemplos:

- (Suma) Un número aumentado (+)en 20 unidades.

$$x + 20$$

- (Resta) Un número disminuido (-) en 7 unidades

$$x - 7$$

- (Multiplicación) El triple de un número:

$$3x$$

- (División) La tercera parte de un número:

$$\frac{x}{3}$$

- La suma de tres números consecutivos:

$$x + (x + 1) + (x + 2)$$

A continuación se presenta un interesante ejemplo donde se hace uso del lenguaje algebraico para "traducir" un problema propuesto con palabras cotidianas,

LA VIDA DE DIOFANTO.

La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado del epitafio que figura en su sepulcro y que se menciona a continuación:

¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto; y los números pueden mostrar ¡oh, milagro!, cuan larga fue su vida. Cuya sexta parte constituyo su hermosa infancia; había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando el vello cubrió su barbilla, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril, y pasó un lustro más cuando dio lugar el nacimiento de su precioso primogénito, que le hizo dichoso, quien entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra; que duró tan sólo la mitad de la de su padre; y éste sobrevivió cuatro años mas a la muerte de su hijo.

Dime cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.

Además de contestar la pregunta principal acerca de la edad de Diofanto se puede dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad se casó?
b) ¿Cuántos años tenía cuando fue padre?

c) ¿Qué edad tenía cuando murió su hijo?

Se hace ahora la traducción, frase por frase, del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático:

LENGUAJE COTIDIANO	LENGUAJE ALGEBRÁICO
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto; y los números pueden mostrar ¡oh, milagro!, cuan larga fue su vida	x
Cuya sexta parte constituyo su hermosa infancia	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando el vello cubrió su barbilla.	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril	$\frac{x}{7}$
Pasó un lustro más cuando dio lugar el nacimiento de su precioso primogénito.	5
Que entregó su cuerpo su hermosa existencia a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre	$\frac{x}{2}$
Y este sobrevivió cuatro años a la muerte de su hijo	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

Al resolver la ecuación anterior se conocerá la edad de Diofanto:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

$$84\left(x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4\right)$$

$$84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336$$

$$84x - 75x = 75x + 756 - 75x$$

$$9x = 756$$

$$9x / 9 = 756 / 9$$

$$x = 84$$

Al conocer la edad de Diofanto que es 84 años, se contestan las preguntas a), b) y c).

a) 21 años

b) 38 años
c) 80 años

Una actividad interesante es buscar palabras sinónimas de las operaciones fundamentales mismas que se utilizan en este tipo de problemas, realizarla y comentarla con su maestro y compañeros

EJERCICIO 4.2

316. Manolo debe dividir el número 106 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor en 24.

317. Tres hermanas reciben una herencia repartida de la siguiente manera: Yolanda recibe cierta cantidad, Rosa Maria recibe $6746 más que Yolanda, y Angélica recibe $5200 más que Rosa Maria. Si el monto total de la herencia fue de $431,000 y se entregaron $123,000 a un asilo, ¿Cuánto recibió cada una?

318. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360º. Si uno de sus ángulos mide 128º, otro mide la cuarta parte de este último, y el tercero mide 93º, ¿Cuánto mide el ángulo faltante?

319. Emmanuel leyó 21 revistas en tres días. Cada día leyó cuatro revistas más que el día anterior. ¿Cuántas revistas leyó cada uno de los tres días?

320. Yolanda pago, por dos kilos de papa y tres kilos de jitomate $21.50 y si el costo de la papa es de $3.40 el kilo. ¿Cuánto le costo el kilo de jitomate?

321. La diferencia de dos números es 5. Si el triple del mayor supera en uno al quíntuplo del menor, obtenga ambos números.

322. La suma de tres números consecutivos es 369 ¿Cuáles son los números?

323. Encuentre dos números impares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados es 72

324. ¿Cuántos alumnos existen en una clase si la tercera parte de ellos están leyendo, la cuarta parte escribiendo y los otros 20 resolviendo problemas?

325. Jorge ha gastado la décima parte, las dos quintas y la cuarta parte de su herencia y sólo le quedan $25,000 ¿Cuánto recibió de herencia?

326. Un padre de familia tiene 45 años y su hijo 20. ¿Dentro de cuánto tiempo será la edad del padre el doble de la del hijo?.

327. ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar

con 5 litros de otro liquido que tiene 90% de alcohol, si se desea una mezcla de 84% de alcohol?

328. Un número aumentado en 25 da 72. Encontrar el valor del número.

329. Un número es la tercera parte de otro. Si la suma de ambos es 48, encontrar ambos números.

330. La suma de tres números es 53. Si el segundo es el triple del primero y el tercero supera en 4 unidades al segundo. ¿Cuáles son los tres números?.

331. La diferencia entre un tercio de un número entero y un cuarto del mismo es 3. ¿Cuál es ese número?

332. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 63. Determine cuales son esos números.

333. Encuentre dos números enteros cuya diferencia sea 5, y cuyo producto sea 195 unidades menos que el cuadrado del número mayor.

334. Juan Pablo compro una patineta en $857, realizo un pago inicial de $392 y dio mensualidades de $93 ¿En cuantos meses termino de liquidar la patineta?

335. Adrián organizo un festival musical en un lugar donde su capacidad es de 4000 espectadores. Si se vendieron la totalidad de entradas a $5 y $8 y se obtuvo un total de $27,200 ¿Que cantidad se vendió de cada precio?

3.- *Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos y tres incógnitas.*

3.1 Representación gráfica de una ecuación

Graficar la ecuación $2x - 3y + 6 = 0$

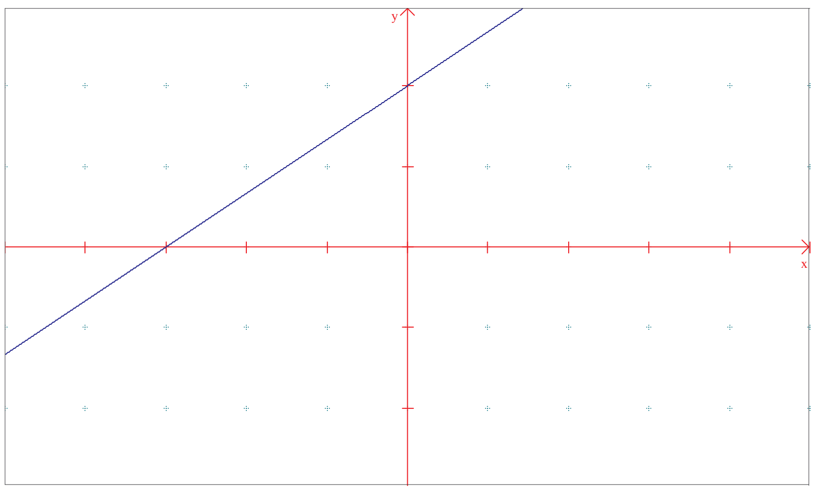
Para trazar la gráfica de una recta cualquiera se recomienda despejar una de las literales y darle valores a la otra (tabular), en este caso " y "

Despeje: $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 2.$

Tabulación:

x	-3	-2	-1	0	Valores asignados
y	0	2/3	4/3	2	Valores calculados

Posteriormente se localizan las parejas de puntos en el plano cartesiano y se unen por medio de una línea continua, recordar que bastan dos puntos para trazar una recta en este caso los pares ordenados (-3 , 0) y (0 , - 2)



3.2 <u>Métodos de solución</u>

(Interpretación de resultados)

En los ejercicios anteriores se solucionaron algunos problemas con dos incógnitas y una se expresaba en función de la otra, a continuación se resolverán sistemas de ecuaciones simultáneamente, es decir, encontrar, si es que hay, una solución que satisfaga al mismo tiempo las dos ecuaciones.

Existen varios métodos para encontrar la solución ellos son:

- Método Gráfico
- Método de eliminación por:
  - Igualación
  - Sustitución
  - Suma o resta

- Determinantes

3.2.1. *Método Gráfico*

Ejemplo 4.4:

a) Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ 3x + 2y &= 14 \end{aligned}$$

Se procede como sigue:

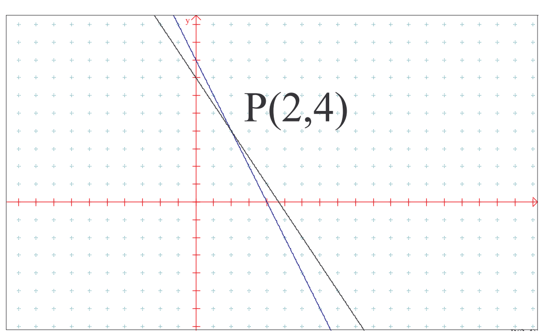
En las dos ecuaciones• se despeja "***y***", expresándola en función de "***x***" como a continuación se indica:

$$y = 8 - 2x$$
$$y = \frac{14 - 3x}{2}$$

Ahora se tabula (se da valores a "***x***" y se calculan los valores que adquiere "***y***").

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	14	12	10	8	6	4	2	0

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23 / 2	20 / 2	17 / 2	14 / 2	11 /2	8 / 2	5 / 2	2 / 2

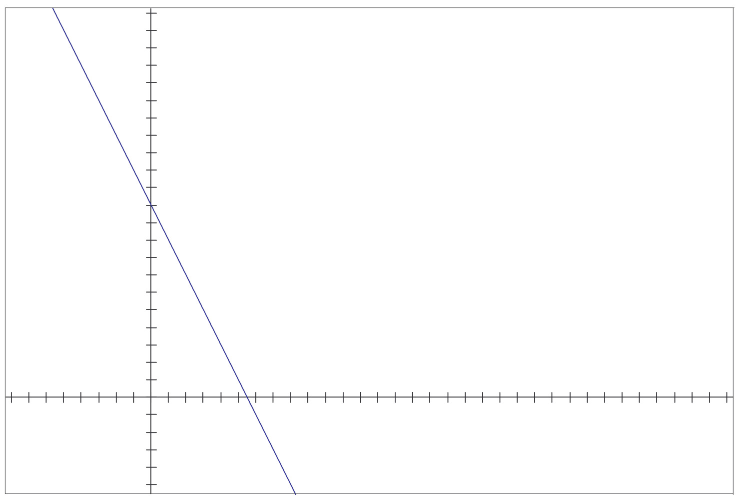


El punto de intersección buscado es "***P***". Así, sus coordenadas son las que satisfacen al sistema P(2 , 4), la gráfica representa un ***Sistema de ecuaciones determinado*** ya que tiene una *solución única*.

b) Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 4x + 2y &= 22 \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores se despeja el valor de "***y***", colocando a esta incógnita en función de "***x***", y tabulando como en el ejemplo anterior.



La gráfica es para las dos ecuaciones la misma recta debido a que son equivalentes.

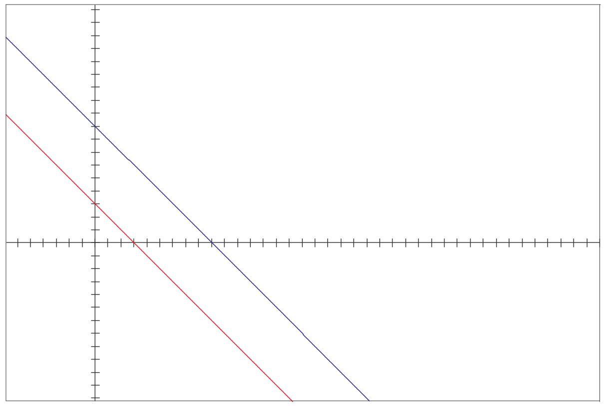
Se verifica multiplicando por 2 a la primera ecuación para obtener la segunda, la gráfica representa un ***Sistema de ecuaciones indeterminado,*** ya que tiene tantas soluciones como puntos tenga la recta.

c)

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

En las dos ecuaciones se despeja el valor de "***y***", colocando a esta incógnita en función de "***x***", y tabulando como en los ejemplos anteriores.



La gráfica representa un ***Sistema de ecuaciones incompatible o inconsistente.***

Por ser rectas paralelas nunca se interceptan.

3.2.2. *Método de Eliminación*.

El método de eliminación esta basado en principios aritméticos simples, y se puede llevar a cabo por tres procedimientos:

c) *Método de Eliminación por Igualación*

- *Principio: Si dos cantidades son iguales a una tercera son iguales entre sí.*

Ejemplo 4.5:

Sí $10 = 6 + 4$ y

$10 = 25 - 15 \quad \therefore$ ($\therefore$ significa "por lo tanto")

$6 + 4 = 25 - 15$

Aplicando este principio a un sistema, el procedimiento es despejar "***la misma***" incógnita de las "***dos***" ecuaciones y se igualan las expresiones resultantes, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ -4x - 3y = -5 \end{cases}$$

Se selecciona despejar a "**x"** y se tiene:

$$(1) \quad x = \frac{-9+2y}{3}$$

$$\frac{5-3y}{4} = x \quad (2)$$

Igualando

$$\frac{-9+2y}{3} = \frac{5-3y}{4}$$

$$12\left(\frac{-9+2y}{3} = \frac{5-3y}{4}\right)$$

$$-36+8y = 15-9y$$

$$-36+8y+9y+36 = 15-9y+9y+36$$

$$17y = 51$$

$$\frac{17y}{17} = \frac{51}{17}$$

$$y = 3 \quad \text{Reemplazando este valor en cualquier ecuacion inicial (1)}$$

$$3x - 2(3) = -9$$

$$3x - 6 = -9$$

$$3x - 6 + 6 = -9 + 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$x = -1$$

Por lo tanto <u>el conjunto</u> solución es el punto en el plano Cartesiano (-1 , 3).

Se deja al lector realizar la comprobación en todos los ejemplos, reemplazando en las dos ecuaciones iniciales

b) ***Método de Eliminación por Sustitución.***

- *Principio: Toda cantidad se puede reemplazar por su equivalente*

Ejemplo 4.6

$$\begin{aligned} \text{Sí } 12 &= 6 * 2 \qquad y \\ 18 &= 12 + 6 \qquad \therefore \\ 18 &= 6 * 2 + 6 \end{aligned}$$

Aplicando este principio a un sistema de ecuaciones, el procedimiento es: despejar "***una***" incógnita de cualquiera de las "***dos***" y se sustituye en la "***otra***", como se muestra a continuación:

$$3x - 2y = -9$$
$$-4x - 3y = -5$$

Se selecciona despejar a **"x"** de la primera y se tiene:

$x = \frac{-9 + 2y}{3}$ a continuación se reemplaza en la otra

$-4\left(\frac{-9 + 2y}{3}\right) - 3y = -5$ al ejecutar las operaciones y multiplicar por **3** ambos miembros

$$36 - -8y \ -9y = -5$$
$$.\quad 36 - 17y = -15$$
$$36 + 15 = 17y$$
$$51 = 17y$$
$$\mathbf{3 = y}$$

Se reemplaza este valor en cualquier ecuación inicial para calcular el de "**x** ":

$$\bullet\ -4x - 3y = -5$$
$$-4x - 3(3) = -5$$
$$-4x - 9 = -5$$
$$5 - 9 = 4x$$
$$-4 = 4x$$
$$\mathbf{-1 = x}$$

Por lo tanto *el conjunto* solución es (-1 , 3).en el plano Cartesiano.

a) *Método de Eliminación por Suma o resta*

Otro principio en las igualdades esta basado en que éstas se pueden multiplicar por cualquier número en ambos miembros sin que se alteren.

Ejemplo 4.7:

Sí $12 + 5 = 17$ y se multiplica por **3** se tiene:
$\mathbf{3}(12 + 5) = \mathbf{3}(17)$
$36 + 15 = 51$

Se aplica este principio a un sistema de ecuaciones y el procedimiento es:

1.- La incógnita que se va a eliminar debe tener el mismo coeficiente y signo contrario.

2.- Para lograr esto cada ecuación se multiplica por el número adecuado.

3.- Se suman algebraicamente las ecuaciones miembro a miembro.

4.- De la ecuación resultante se despeja la literal.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -9 \\ -4x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

Se Selecciona eliminar "**y**", por lo tanto los números adecuados en este caso son **4** y **3**

$$\begin{aligned} \mathbf{4}\,(3x - 2y) &= \mathbf{4}\,(-9) \\ \mathbf{3}\,(-4x - 3y &= \mathbf{3}\,(-5) \end{aligned}$$

Una forma de abreviar el procedimiento anterior es multiplicar ***toda*** la ecuación por el mismo número. Como se realiza a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{4}\,(3x - 2y &= -9) \\ \mathbf{3}\,(-4x - 3y &= -5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x - 8y &= -36 \\ -12x - 9y &= -15 \\ \hline \end{aligned}$$

Al agrupar $-17y = -51$

$$\mathbf{y = -3}$$

Al reemplazar este valor en **cualquier** ecuación inicial se obtiene el valor de la otra incógnita:

$$\begin{aligned} -4x - 3y &= -5 \\ -4x - 3(3) &= -5 \\ -4x - 9 &= -5 \\ 5 - 9 &= 4x \\ -4 &= 4x \\ \mathbf{-1} &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

Al observar el inicio del proceso de eliminación en cada caso es diferente pero en algún momento se tienen los mismos pasos, investigar a partir de que momento es cierto y comentarlo con el maestro.

3.2.3 *Determinantes*

a) *De segundo orden (2 x 2)*

El arreglo o disposición de cuatro números reales dentro de dos líneas paralelas como:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = \Delta$$

Recibe el nombre de "***determinante***", (que se representa con la letra griega delta mayúscula **Δ**), este caso se conoce como "*de segundo orden*", por tener dos renglones o filas y dos columnas. En general, se puede simbolizar un determinante de segundo orden como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

Se utiliza una sola letra con un doble subíndice, para facilitar la generalización de determinantes de mayor orden, donde el primer número indica el renglón en que se ubica el número, y el segundo la columna.

Para solucionar un determinante de segundo orden se procede de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

Ejemplo 4.8:

Encontrar el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (-4)(-3)$$
$$= 10 - 12$$
$$= -2$$

b) *De tercer orden (3 x 3)*

Un determinante *de tercer orden* es el arreglo de nueve números o elementos entre dos líneas paralelas, y representa un número real, dado por el siguiente procedimiento:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{22} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Si se observa cada término del segundo miembro contiene exactamente un elemento de cada columna y de cada renglón.

Existen varios procedimientos para encontrar el valor de un determinante de tercer orden, uno de ellos es la ***regla de Sarrus***, que tiene dos alternativas y es sencillo, y se explica con los siguientes ejemplos:

Resolver el determinante: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Una de las formas es seguir el procedimiento de repetir debajo de la última fila, las dos primeras, en orden; a continuación trazar 3 diagonales en donde se encuentren tres elementos en la forma indicada por la figura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Después se realizan las multiplicaciones de izquierda a derecha respetando el signo obtenido y luego de derecha a izquierda cambiando el signo obtenido :

Δ= (-1)(2)(-4) + (2)(1)(2) + (-3)(-3)(-1) - (-3)(2)(2) - (-1)(1)(-1) - (2)(-3)(-4)
Δ= 8 + 4 - 9 + 12 -1 - 24
Δ= -10

La otra forma es repetir en seguida de la última columna, las dos primeras, en orden, y trazar 3 diagonales en donde se encuentren tres elementos en la forma indicada por la figura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

A continuación se procede de igual forma que el caso anterior:

Δ = (-1)(2)(-4) + (-3)(-1)(-3) + (2)(2)(1) - (-3)(2)(2) - (1)(-1)(-1) - (-4)(2)(-3)
Δ = 8 - 9 + 4 + 12 - 1 - 24
Δ = - 10

Si se observa a los sumandos en ambos procedimientos son los mismos, por lo que es indistinto el uso de cualquiera de ellos,.para llegar al resultado

Al aplicar este procedimiento en la solución de sistemas de ecuaciones se utiliza la regla de ***Cramer*** en dónde de las iniciales se obtiene el determinante (**Δ**) del sistema con los coeficientes de los términos.

Y para obtener el valor de una incógnita se reemplaza la columna de sus coeficientes por los términos independientes,

La regla de Cramer es:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Ejemplo 4.9:

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x \quad\quad + z &= 6 \end{aligned}$$

El determinante del sistema se calcula:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 3 + 0 - 3 - 0 - 2$$

$$\Delta = -3$$

Aplicando la regla de Cramer, para calcular "***x***":

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x = \frac{6-6-3}{-3}$$

$$x = 1$$

A continuación se calcula "***y***", con el mismo procedimiento

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{3-12+9-6}{-3}$$

$$y = 4$$

Finalmente se calcula "***z***", con el mismo procedimiento

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$z = \frac{-6+9-12}{-3}$$

$$z = 3$$

Se deja al estudiante la comprobación de estos resultados.

EJERCICIO 4.3

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando al menos dos métodos, de los estudiados anteriormente:

340. $7x + 2y = 8$

$x - 2y = 12$

341. $x + 6y = 27$

$7x - 3y = 9$

342. $6x - 18y = -85$

$24x - 5y = -5$

343. $-7x + 8y = 25$

$x - 5y = 8$

344. $3x + 3y = 21$

$2x - 3y = -6$

345. $2x + y = b + 2$

$bx - y = 0$

346. $y = 3x - 3$

$6x = 8 + 3y$

347. $2x + 3y = 2y - 2$

$3x + 2y = 2x - 2$

348. $3x - 2y + 3z = 11$

$2x + 3y - 2z = -5$

$x + 4y - z = -5$

349. $5x - 2y + z = 24$

$2x + 5y - 2z = -14$

$x - 4y + 3z = 26$

350. $a - 3b + 2c = -7$

$2a + 4b + 3c = 6$

$-a + 2b - c = 5$

351. $x - 8y + 2z = -1$

$2x - 11y + 3z = 2$

$-8y + 2z = -1$

352. $-3y = 2$

$-2x = 2$

$-x + 2y + 3z = -7$

353. $z + x = -6$

$y + z = -1$

$x + y = 1$

354. $z - 5x = -14$

$-2y + 3x = 0$

$4z + 3y = 25$

3.2.4 Aplicaciones

Como ya se analizó en el apartado 2.2, las aplicaciones son problemas escritos y planteados con palabras, enunciados que expresan y representan relaciones entre cantidades numéricas. Nuestro objetivo es traducir la expresión del problema en una ecuación algebraica que pueda resolverse por los métodos y procedimientos conocidos hasta ahora.

Se sugiere que para resolver un problema planteado con palabras se proceda como sigue:

1. Se encuentra las cantidades incógnitas y se representan con dos o más variables (letras).
2. Se interpretan y traducen los datos del problema a dos o más ecuaciones algebraicas.
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones por los métodos estudiados.
4. Se comprueba la solución en el problema original planteado con palabras.

EJERCICIO 4.4

Encontrar lo que se pide en cada problema a partir del planteamiento de un sistema de ecuaciones con dos o más variables.

355. En un supermercado que vende fruta por Kg., Juan compró tres Kg. de naranjas y seis Kg. de toronjas por un total de $78, mientras que Pablo pagó $76 por cinco Kg. de naranjas y cuatro Kg. de toronjas. ¿Cuál es el precio por Kg. de cada una de estas frutas?

356. Yolanda va al supermercado, compra 3 Kg. de café y 8 Kg. de té pagando $ 489. Después Araceli va al mismo lugar y adquiere por $463 5 Kg. de café y 6 Kg. de té. ¿Calcule el costo por Kg. de cada producto?

357. Una maquina cambia billetes de $ 500, lo hace por billetes de $50 y $20. Si al introducir un billete Usted recibe 13 billetes ¿Cuántos billetes recibe cada uno?

358. Rodrigo es joyero y tiene dos barras de oro; una es de 12 kilates, otra es de 18 (el oro puro es de 24 kilates, el de 12 corresponde a $\frac{12}{24}$ de pureza, el de 18 a $\frac{18}{24}$ de pureza) ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 40 gramos de oro de 14 kilates?

359. En geometría analítica (matemáticas III) se mostrara que el área de un triangulo cualquiera con vértices en (x_1, x_2), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) corresponde al valor absoluto de:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizar el resultado anterior para obtener el área del triangulo cuyos vértices son: A(1, 1), B(- 1, 4), C(4, 8).

360. Un triangulo tiene como vértices los puntos en el plano cartesiano P(2, 5) Q(- 1, 2), R(6, -3), con el auxilio de determinantes encontrar el valor de su área.