UNIDAD II

FACTORIZACIÓN.

OBJETIVO ESPECÍFICO.

Al finalizar la unidad, el estudiante será capaz de descomponer en dos o más factores diferentes polinomios, distinguiendo los distintos casos que se presentan.

ANTECEDENTES:

Con anterioridad se definieron las operaciones básicas con números reales, una de ellas es la multiplicación. Como operación binaria la multiplicación relaciona a dos números reales cualesquiera con un tercero tal que:

(a)(b) = c, donde "***a***" y "***b***" se denominan *"factores"* y "***c***" es el "*producto*".

Así, se dice que los factores primos y/o compuestos ***positivos*** de 12 son: 2, 3, 4, y 6. De tal forma que el número 12 se puede expresar como el producto de: (2)(6), (3)(4) o (2)(2)(3).

Definición.

Se denomina FACTORIZACIÓN al proceso mediante el cual se expresa un número real como el producto indicado de sus factores.

EJEMPLO 2.1

Con base en la definición anterior, la factorización de 24 es:

24 = (6)(4)
24 = (8)(3)
24 = (12)(2)
24 = (3)(2)(2)(2).

En general, cualquier cantidad puede expresarse en términos de dos o más factores, ya sea primo y/o compuesto.

Si el resultado de la factorización contiene al menos un número compuesto se dice que es *PARCIAL* (6) (4), (8) (3) y (12) (2). Cuando el resultado esta constituido únicamente de números primos, se le denomina *TOTAL* (3) (2) (2) (2).

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRÁICAS.

El proceso de factorizar expresiones algebraicas a este nivel se limita a la descomposición de polinomios con coeficientes racionales y factores que no contengan raíces.

En la segunda forma se verá que $a^2 - 4$ se puede expresar como el producto de $(a + 2)(a - 2)$, donde **a** y **2** son las raíces ***exactas*** de a^2 y 4 respectivamente, sin embargo en la expresión $m^2 - 5$, el coeficiente racional "***5***" no tiene raíz exacta, y se dice que no se puede factorizar; aunque en cursos superiores se factorizará con expresiones que contendrán raíces inexactas.

Los procesos de factorización de expresiones algebraicas más utilizadas en este curso son:

1) Factor común.
2) Diferencia de cuadrados.
3) Suma o diferencia de cubos.
4) Polinomio cubo perfecto.
5) Agrupación.
6) Trinomio de segundo grado.
   a) De la forma $ax^2 + bx + c$.
   b) De la forma $x^2 + bx + c$.

1) Factor común.

De acuerdo a las propiedades de los números reales, una es la distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac. \qquad (1)$$

Otra es la de simetría:

si x = y entonces **y = x.**

Esta permite invertir los miembros de una igualdad sin que se altere. Si la aplicamos a la expresión (1), se tiene:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Se identifica al término "***a***" como el máximo común divisor (M.C.D.) de la expresión ya que corresponde al de mayor magnitud entre el cual pueden dividirse exactamente todos y cada uno de los términos.

En la expresión $3ab + 6ac$, se identifica al M. C. D. (Máximo Común Divisor), como ***3a***

En otras palabras, el factor común de una expresión algebraica es el M.C.D. de la misma. Este factor común puede ser un monomio o un polinomio.

EJEMPLO 2.1

a) Factorizar: $-5x^3 + 25x^2 - 15x$.

Se observa que todos los coeficientes numéricos son divisibles entre ***"5"***, y la letra que se repite, con menor exponente es ***"x"***, por lo tanto se identifica el M.C.D. de la expresión como "***5x***" o bien ***"-5x"*** considerando el signo como parte del factor común. Así:

$$-5x^3 + 25x^2 - 15x = \mathbf{+5x(-x^2 + 5x - 3)}.$$

o

$$-5x^3 + 25x^2 - 15x = \mathbf{-5x(x^2 - 5x + 3)}.$$

b) Factorizar: $24(a-b)^4 c + 12b(a-b)^2 - 3(a-b)^3$.

En esta expresión se observa que los números 24, 12 y 3 tienen como M.C.D. a "***3***" y el binomio que se repite, de menor exponente es $(a-b)^2$, por lo tanto se identifica a $3(a-b)^2$ como el factor común.

$$24(a-b)^4 c + 12b(a-b)^2 - 3(a-b)^3 = 3(a-b)^2 \; [\, 8(a-b)^2 c + 4b - (a-b) \,]$$

EJERCICIO 2.1

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

126. $27y - 9y^2$
127. $9x^2 + 18x + 3$
128. $8a^3bc - 12ab^3cd + 4b^4c^2d^2$
129. $5a^4 + 11a^3 - 7a^2$
130. $84u^5v^4 - 108u^4v^5 + 420u^6v^3$
131. $4x(2x+1) + (2x+1)$
132. $(x+3)^3(x+1) + (x+3)^2(x-1)^2$
133. $t(1+r) + t(1+r)r$
134. $2(n+2)^2(n-3) - 3(n+2)(n-3)^2$
135. $6m^3n^3 + 3m^3n^2 + m^2n^2$

2) <u>Factorización de una diferencia de cuadrados.</u>

Es importante hacer notar que, en lo sucesivo, cuando se hable de un "CUADRADO PERFECTO" se esta haciendo referencia al resultado de elevar un término al cuadrado.

Por lo tanto, se dice que dos o más términos son cuadrados perfectos cuando el coeficiente numérico de los mismos tiene raíz cuadrada exacta y las literales tienen exponente par.

EJEMPLO 2.2

De las siguientes expresiones identificar cuál o cuáles son cuadrados perfectos:

a) $2x^2$, b) $16m^2n^3$, c) $81m^6$, d) $(5x + 2y)^2$

Efectivamente, hay dos cuadrados perfectos "**c)**" y "**d)**"

Al recordar el desarrollo de los productos notables el resultado de multiplicar dos "*binomios conjugados*" es una diferencia de cuadrados que tiene dos términos cuadrados perfectos separados por un signo negativo; aplicando la propiedad de simetría se tiene:

$$\text{Sí } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad \text{entonces} \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

La factorización de una diferencia de cuadrados es el producto indicado de dos binomios conjugados, cuyos términos son las raíces del primer y del segundo término cuadrado perfecto respectivamente

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Otra solución utilizada con poca frecuencia utilizada es:

$$a^2 - b^2 = (-a + b)(-a - b).$$

EJEMPLO 2.3

a) Factorizar: $4x^2 - 9y^2$.

Se identifica a las raíces del primero y del segundo termino que son cuadrados perfectos, respectivamente, "***2x***" y "***3y***", por lo tanto la factorización total es:

$$4x^2 - 9y^2 = \mathbf{(2x + 3y)(2x - 3y)}.$$

b) Factorizar: $16m^2 - (2c + 3d)^2$.

Se observa que $(2c + 3d)^2$ es un binomio al cuadrado.

Al identificar que las raíces cuadradas del primero y segundo términos son "**4m**" *y* "**(2c + 3d)**" , la factorización total es:

$$16m^2 - (2c + 3d)^2 = [\,4m - (2c + 3d)]\ [\,4m + (2c + 3d)]$$

Suprimiendo símbolos de agrupación:

$$16m^2 - (2c + 3d)^2 = \mathbf{(4m - 2c - 3d)\ (4m + 2c + 3d)}$$

c) Factorizar: $2x^3 - 18x$

La expresión no es una diferencia de cuadrados, sin embargo, al analizarla se localiza un factor común que es "***2x***" y al factorizar:

$$2x^3 - 18x = 2x\,(x^2 - 9)$$

Se observa que $2x\,(x^2 - 9)$ es una factorización PARCIAL dado que $(x^2 - 9)$ es una diferencia de cuadrados, de tal forma que la factorización TOTAL es:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 18x &= 2x\,(x^2 - 9) \\ &= 2x\,(x - 3)(x + 3) \end{aligned}$$

d) Factorizar: $x^4 - 16$

Por tener raíz cuadrada exacta sus términos, es una diferencia de cuadrados, y al factorizar:

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

Nuevamente la factorización anterior es PARCIAL, ya que al observar el factor $(x^2 - 4)$ es una diferencia de cuadrados, así, la factorización TOTAL es:

$$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2 + 4)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

RECOMENDACIÓN: al factorizar cualquier expresión iniciar verificando si existe algún factor común. Además verificar que en la expresión final se tenga una factorización TOTAL.

EJERCICIO 2.2

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

136. $a^2 - 1$
137. $20x^3 - 5x^5$
138. $z^4 - 9$
139. $64t^4 -$
140. $4m^4 - 16$
141. $-b^2 + 81$
142. $(a + b)^2 - (a - b)^2$
143. $25y^4 - (w + 3)^2$
144. $-4c^6 + 36d^8$
145. $7w^2 - 343$

146. $x^2 - \frac{1}{4}$

147. $\frac{9}{16} - 25x^2$

148. $m^4 - \frac{x^2}{16}$

149. $\frac{9x^2}{25} - \frac{49y^8}{81z^6}$

3) Factorización de una suma o diferencia de cubos.

Se dice que un término es *cubo perfecto* si su coeficiente tiene ***raíz cúbica exacta*** y sus literales tienen exponentes múltiplos de 3.

Tanto la suma como la diferencia de cubos son el resultado del producto de un binomio por un trinomio.

Observar las expresiones siguientes:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
y
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Identificar las semejanzas y las diferencias entre ellas.

SEMEJANZAS	DIFERENCIAS

Y finalmente, describir la relación entre los términos de los binomios y los de los trinomios, comentar en clase.

Por la propiedad de simetría:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
y
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

EJEMPLO 2.4

a) Factorizar: $m^3 + 8$.

Las raíces cúbicas de los términos son, respectivamente, "***m***" y "***2***"; dado que es una suma de cubos, la factorización TOTAL será:

$$m^3 + 8 = \mathbf{(m + 2)(m^2 - 2m + 4).}$$

Factorizar: $375x - 3x^4$.

Los términos de la expresión no son cubos perfectos, sin embargo es posible factorizar primero el factor común, que es “***3x***”, así:

$$375x - 3x^4 = 3x\,(125 - x^3)$$

El resultado anterior es una factorización PARCIAL ya que identificamos al binomio (25 – x³) como una diferencia de cubos y las raíces cúbicas correspondientes de los términos son “***5***” y “***x***”, por lo tanto la factorización TOTAL es:

$$375x - 3x^4 = \mathbf{3x\,(5 + x)\,(25 - 5x + x^2)}$$

EJERCICIO 2.3

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

150. $a^3 + 64$
151. $27c^6 - 343$
152. $8m^3 - 125n^6$
153. $1 - 216z^{12}$
154. $-54mn^7 + 16m^4n$
155. $w^{15} + 64$
156. $y^9 + 1$
157. $(t + 1)^3 - 8$
158. $-w^6 + 64$
159. $\dfrac{b^3}{64} - \dfrac{8}{b^3}$

4) <u>Factorización de un polinomio cubo perfecto.</u>

Al elevar un binomio al cubo se obtiene un polinomio de cuatro términos denominado *polinomio cubo perfecto* (P.C.P.):

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Al observar las características del polinomio cubo perfecto, en lenguaje común se dice: “el primero y el último de los términos son cubos perfectos, el segundo es el triple producto del cuadrado del primer termino del binomio por el segundo, y el tercero es el triple producto del primer término del binomio multiplicado por el cuadrado del segundo”.

Aplicando la propiedad de simetría, se tiene:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3.$$

La factorización de *un polinomio cubo perfecto* debe llevar a un *binomio al cubo*.

EJEMPLO 2.5

a) Factorizar: $60x^2 + 125 + 150x + 8x^3$.

En las características de un polinomio cubo perfecto no se menciona el orden de los términos, sólo hay que identificar los cubos perfectos y los correspondientes triples productos de sus raíces; en este caso "$+8x^3$" y "$+125$" son los cubos perfectos y las raíces cúbicas son "$+2x$" y "$+5$", respectivamente.

Por otra parte $\mathbf{3(+2x)^2(+5) = 3(4x^2)(+5) = 60x^2}$ y $\mathbf{3(2x)(5)^2 = (6x)(25) = 150x}$

son los triples productos, de tal forma que la factorización total, una vez ordenado el polinomio es:

$$8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = \mathbf{(2x + 5)^3}$$

b) Factorizar: $c^6 - 12c^4 + 48c^2 - 64$.

Al identificar en este caso que los cubos perfectos "$+c^6$" y "-64" tienen raíces cúbicas "$+c^2$" y "-4", respectivamente.

Los triples productos son:

$$\mathbf{3(+c^2)^2(-4) = -12c^4}$$

y $\mathbf{3(+c^2)(-4)^2 = 48c^2}$, de tal forma que:

$$c^6 - 12c^4 + 48c^2 - 64 = \mathbf{(c^2 - 4)^3}.$$

Por otra parte, ¿qué identifica dentro del paréntesis en el resultado anterior? ¿La factorización propuesta es TOTAL? ¿SÍ o NO? ¿Por qué? Comentar en clase las observaciones.

EJERCICIO 2.4

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes

160. $m^3 - 9m^2 + 27m - 27$
161. $125x^3y^6 + 225x^2y^4z + 135xy^2z^2 + 27z^3$
162. $1 + 12a^2b - 6ab - 8a^3b^3$
163. $27 - 27z + 9z^2 - z^3$
164. $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
165. $27a^6b^3 - 54a^4b^2 + 36a^2b - 8$
166. $w^9 + 36w^6 + 3w^3 + 1$

167. $\frac{1}{8}n^3 - 3\,n^2\,m + 24\,n\,m^2 - 64$

168. $64\,x^9 - 125\,y^{12} - 240\,x^6\,y^4 + 300\,x^3\,y^8$

169. $64\,a^4\,b - 96\,a^3\,b^2 + 48\,a^2\,b^3 - 8\,a\,b^4$

5) Factorización por agrupación.

Existen expresiones algebraicas de 4 o más términos que no pueden factorizarse por los procedimientos vistos hasta el momento. En estos casos es conveniente aplicar la *propiedad conmutativa* en los términos y *agruparlos* de tal forma que en cada parte sea posible algún tipo de factorización.

EJEMPLO 2.6

a) Factorizar: $12xy - 3y + 8x - 2$.

Al observar la expresión nos damos cuenta que no es posible factorizarla por alguna de las formas vistas hasta el momento. Sin embargo, al aplicar la propiedad asociativa, se identifica un factor común en los primeros dos términos "***12xy***" y "***– 3y***" que es "***3y***"; los dos últimos términos "***8x***" y "***–2***", también tienen un factor común que es "***2***".

Por lo tanto:

$$12xy - 3y + 8x - 2 = (12xy - 3y) + (8x - 2)$$
$$12xy - 3y + 8x - 2 = 3y\,(4x - 1) + 2(4x - 1).$$

En esta última expresión se identifica que $(4x - 1)$ es a su vez un factor común binomio, de tal forma que la factorización total es:

$$12xy - 3y + 8x - 2 = (4x - 1)\,\mathbf{(3y + 2)}$$

¿Qué ocurre si se ordenan en forma distinta los términos para agruparlos? ¿Se llegara al mismo resultado? Comprobarlo y comentarlo en clase.

b) Factorizar: $z^2 + 2z + 1 - 4w^2$.

Antes de continuar con la lectura, probar distintas agrupaciones por parejas. ¿Qué conclusión se obtiene?

Se dará cuenta que no fue posible factorizar por el procedimiento de agrupación por parejas como en el ejemplo anterior. Sin embargo, se observa la expresión, y se identifica que los primeros tres términos son un T.C.P., por lo que, agrupando:

$$z^2 + 2z + 1 - 4w^2 = (z^2 + 2z + 1) - 4w^2.$$

Y factorizando:

$$z^2 + 2z + 1 - 4w^2 = (z + 1)^2 - 4w^2.$$

Además, en esta última expresión se identifica una diferencia de cuadrados, de tal forma que al factorizarla totalmente se tiene:

$$z^2 + 2z + 1 - 4w^2 = \mathbf{[(z + 1) - 2w] [(z + 1) + 2w]}$$

Resultado que dependiendo el problema, se pueden eliminar algunos de los paréntesis:

$$(z + 1 - 2w) (z + 1 + 2w)$$

Es importante recordar que al momento de realizar la agrupación se debe tener cuidado con el signo que antecede al paréntesis, ya que si este es positivo no afectará los signos de los términos dentro del paréntesis, pero si es negativo para que la expresión no altere su valor los signos de los términos dentro del paréntesis deben invertirse.

EJERCICIO 2.5

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

166. $8 - 8x^2 + x^3 - x^5$
167. $w^2 + 3w - 2wy - 6y$
168. $z^3 - 2z^2 - 3z + 6$
169. $x^2 + 4x + 4 - y^2 + 2yz - z^2$
170. $a^2 - 4b + ab - 4a$
171. $m^2 - b^2 - 2mn + n^2$
172. $3cx^2 - 6by + 9cy - 2bx^2$
173. $x^2 + xy + xz + yz + y^2 + yx$
174. $12xy + 9cy + 3cx + 4x^2$
175. $mn - n^2 - nk + mk - nk - k^2$

6) Factorización de trinomios de segundo grado.

La forma general de un trinomio de este tipo es:

$$\underline{\boldsymbol{ax^2 + bx + c}}$$

En esta expresión se identifican tres términos:

- **ax^2** es el término cuadrático
- **bx** se llama término lineal
- **c** recibe el nombre de término independiente.

1. *Primer Caso*: cuando a =1 se tiene un Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar este trinomio se utilizará el método de agrupación, pero antes de aplicarlo se requiere reemplazar el coeficiente del término lineal (b) con el auxilio de la factorización del coeficiente "c" de acuerdo al proceso aplicado al siguiente;

EJEMPLO 2.7

Factorizar: $x^2 + 7x + 12$.

FACTORIZACIÓN DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE (c = 12):

12	2
6	2
3	3
1	1

Con los factores 1, 2, 2, 3, se buscarán a continuación todos los números compuestos cuyo producto sea 12

Producto	***suma o resta***
12 • 1	= 13 y 11
6 • 2	= 8 y 4
4 • 3	**= 7** y 1

Al sumar o restar las parejas de factores, se identifica a 4 • 3 como los factores cuyo resultado es: + 4 + 3 = + 7; entonces, reemplazando en el trinomio el término **7x** por **4x + 3x**

$$x^2 + \mathbf{7x} + 12 = x^2 \mathbf{+ 4x + 3x} + 12$$

Aplicando ahora el método de agrupación a la expresión resultante se tiene:

$$x^2 + 4x + 3x + 12 = (x^2 + 4x) + (3x + 12)$$

$$= x\,\mathbf{(x + 4)} + 3\,\mathbf{(x + 4)}$$

Se Identifica a **(x + 4)** como factor común polinomio y la factorización **total** es:

$$x^2 + 7x + 12 = x\,\mathbf{(x + 4)} + 3\,\mathbf{(x + 4)}$$

Al analizar la expresión anterior se identifican dos binomios con término común en el resultado.

$$= \mathbf{(x + 4)}\,(x + 3)$$

EJERCICIO 2.6

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

176. $b^2 - 3b - 10$
177. $w^2 - w - 2$
178. $z^2 + 7z + 12$
179. $x^2 - x - 20$
180. $a^2 - 2a - 3$
181. $m^4 - 5m^2 + 4$
182. $x^2 + 3xy - 10y^2$
183. $3c^2 + 27c + 42$
184. $y^2 - 19y - 20$
185. $5n^3 - 5n^2 - 60n$

2. *Segundo Caso*: cuando $a > 1$ se tiene un Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Para factorizar el trinomio se utiliza el método de agrupación, pero antes de aplicarlo se requiere reemplazar el coeficiente del término lineal (**b**) con el auxilio de la factorización simultánea de los coeficientes "a" y "c" de acuerdo al proceso aplicado a los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.8

Factorizar: $20x^2 + 7x - 6$.

FACTORIZACIÓN SIMULTANEA DE 20 Y 6:

20	2
10	2
5	5
1	1
6	2
3	3
1	1

Con los factores 1, 2, 2, 2, 3, 5, se buscarán a continuación números compuestos cuyo producto sea 120, se toman en cuenta todos.

$1 \bullet (2)(2)(5)(2)(3)$
$60 \bullet 2$
$40 \bullet 3$
$30 \bullet 4$
$24 \bullet 5$
$20 \bullet 6$
$\mathbf{15 \bullet 8}$
$12 \bullet 10$.

Al sumar o restar las parejas de factores, identificamos a **15 • 8** como los factores cuyo resultado es: +15 – 8 = +7, entonces, al reemplazar en el trinomio el término 7x como 15x – 8x

$$20x^2 + 7x - 6 \;=\; 20x^2 + 15x - 8x - 6$$

Aplicando a continuación el método de agrupación a la expresión resultante se tiene:

$$\begin{aligned} 20x^2 + 7x - 6 &= 20x^2 + 15x - 8x - 6 \\ &= 5x\,\mathbf{(4x+3)} - 2\,\mathbf{(4x+3)} \end{aligned}$$

Se identifica a **(4x + 3)** como factor común polinomio y la factorización total es:

$$20x^2 + 7x - 6 \;=\; \mathbf{(4x+3)}\,(5x - 2)$$

EJERCICIO 2.7

Factorizar **TOTALMENTE** las expresiones siguientes:

186. $3x^2 + 4x - 4$
187. $6a^2 + 17a + 12$
188. $3w^2 - 16w + 35$
189. $6x^2 - 31x + 35$
190. $15c^2 + 11cd - 12d^2$
191. $4x^2 + 13x + 3$
192. $6a^2b^2 + 17abc + 12c^2$
193. $2m^2 + 5mn + 2n^2$
194. $16y^4 - 30y^2 + 9$
195. $30x^6 + 7x^3y - 49y^2$