CENTRO: BACHILLERATO Y SECUNDARIA
DEPARTAMENTO: MATEMATICAS
SEMESTRE: 1°.
CREDITOS: 6 HT 1 HP 4

APUNTES DE MATEMATICAS I (ALGEBRA) DE ACUERDO AL PLAN DE ESTUDIOS 2004 DEL BACHILERATO DE LA U. A. A.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el curso, el alumno será capaz de comprender, aplicar y analizar los conocimientos básicos de álgebra, favoreciendo el desarrollo de los procesos cognitivos que le ayudarán a tener un pensamiento organizado y sistemático necesario para su desempeño en cursos posteriores de Matemáticas y en los de materias relacionadas con ella.

ÁLGEBRA. Es la rama de las matemáticas que estudia las cantidades consideradas del modo más general posible.

UNIDAD I

INTRODUCCION

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno será capaz de definir e identificar diferentes tipos de expresiones algebraicas y podrá realizar operaciones con ellas.

Las cuatro operaciones básicas que se estudiaron en Aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división, son también operaciones algebraicas. Estas son de gran importancia, no solo en el álgebra sino también en cualquier otra rama de las matemáticas donde son utilizadas. Estas operaciones están sujetas a ciertas restricciones o condiciones llamadas *propiedades o leyes.* Es esencial para poder obtener resultados correctos, aplicar las operaciones de acuerdo con estas leyes. El uso inadecuado de las operaciones algebraicas probablemente es la causa de la mayor dificultad con que se encuentran no solamente los estudiantes de álgebra sino también los de otras ramas de las matemáticas.

1. Suma y resta de expresiones algebraicas

1.1 *Término algebraico:* Consta de: *Signo, coeficiente y parte literal.* Llamado también monomio, es la parte individual de una expresión algebraica separada del resto mediante un signo de operación de suma o resta (+, -).

Coeficiente Numérico Exponentes

$$6\,a^2b^3$$

Ejemplo 1.1:

$$3ab,\quad -x,\quad \frac{3}{5}abc\,,\quad -5m^2n^3,\quad (2x-3y),\quad 4(x-y)$$

En el término **3ab**, el coeficiente es **3**, e indica que la parte literal **ab** se repite como sumando 3 veces, esto es :

$$3ab = ab + ab + ab$$

Y en el término **-5m²n³**, el coeficiente es **–5** e indica que la parte literal **m²n³** se repite como "**sumando**" 5 veces, esto es :

$$-5m^2n^3 = -\,m^2n^3 - m^2n^3 - m^2n^3 - m^2n^3 - m^2n^3$$

En un término algebraico se consideran dos tipos de coeficientes: numérico, si la cantidad es un número real y, literal, cuando una de las letras es tomada como coeficiente.

En la expresión *abc*,

a) ¿Cuál es el signo?
b) ¿Cuál es el coeficiente numérico?
c) Si la letra *a* es considerada como el coeficiente, ¿cuál es el significado de la expresión?
d) Tomando en cuenta la propiedad conmutativa de la multiplicación, ¿cuál es el coeficiente de cada literal?

1.2 *Términos semejantes:* Se consideran términos semejantes aquellos que solamente difieren en su coeficiente numérico.

Ejemplo 1.2

$$3ab^2c\ ,\ -\frac{3}{4}ab^2c\,,\quad -2\sqrt{3}ab^2c\quad y\quad 23\,ab^2c$$

$$x^2yz^5\ ,\quad 4\,x^2yz^5\ ,\quad \frac{11}{5}x^2yz^5\quad y\quad \sqrt{3}x^2yz^5$$

1.3 *Expresiones algebraicas.* Una expresión algebraica es la unión de dos o más términos mediante el signo de operación de suma o resta.

$$2a^3b + \tfrac{1}{2}a^2b^3 - 5ab$$

3 Términos

Cuando una expresión algebraica contiene un solo término se denomina **MONOMIO.** Pero si dicha expresión consta de dos o más términos algebraicos separados por signos (**+**) o (**-**), se denomina **POLINOMIO** de **"n" términos.** En particular el de dos términos se llama *BINOMIO* y el que contiene tres términos *TRINOMIO*.

Ejemplo 1.3

Monomio	$12abxyz^3$
Binomio	$\tfrac{3}{4}mn^3pst - 5rst^3y$
Trinomio	$5mxy^3z + \tfrac{1}{2}nxy - 11pqr$
Polinomio De 5 términos.	$5a^2y + 3bz^3 - 11c^2mx + 2dpr - 6p^3q$

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al reemplazar las letras por un valor asignado, realizando posteriormente las operaciones indicadas, respetando la prioridad de los operadores matemáticos.

Ejemplo 1.4

Si: $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$, y $d = -3$

Encontrar el valor numérico de:

a) $$\begin{aligned} 8abc &= 8(2)(-2)(1) \\ &= 16(-2)(1) \\ &= -32(1) \\ &= -32 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 5a^3b^2cd^3 &= 5(2)^3(-2)^2(1)(-3)^3 \\ &= 5(8)(4)(1)(-27) \\ &= 40(4)(1)(-27) \\ &= 160(1)(-27) \\ &= 160(-27) \\ &= -4320 \end{aligned}$$

Ahora si: $x = 2, \quad y = 9, \quad z = \frac{1}{3}$

Encontrar el valor numérico de:

c)
$$
\begin{aligned}
3xz\sqrt{2xy} &= \\
&= 3(2)\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{(2)(2)(9)} \\
&= \frac{(3)(2)}{3}\sqrt{36} \\
&= (2)(6) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 1.1

Evalúe las expresiones siguientes, cuando los valores de $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$ y $d = \frac{3}{5}$

1. $a - 7$
2. $3a + 5b$
3. $5a^2 - 2d^3 + 5$
4. $2c - (3a - 3d)^2$
5. $5a - b(6a - 2b + c)$
6. $-b - d + d(2a^2 - 10d)^3$
7. $\frac{a+b}{2c-d}$
8. $\frac{a-b(c+d)}{-c+3d+5}$
9. $\frac{2d}{3c} - \frac{3b}{2a} + \frac{3}{2}$
10. $\frac{4d}{5c} - \frac{a}{b} + \frac{b}{d}$

1.4 Suma y resta de expresiones algebraicas.

Una expresión que contiene dos o más términos semejantes se puede simplificar "reduciéndolos".

Para *reducir términos semejantes* se procede a sumar algebraicamente sus coeficientes numéricos. Es recomendable ordenar alfabéticamente las literales de cada término del resultado. De la misma manera, se ordenan todos los términos en forma ascendente o descendente con relación al exponente de una de las literales, como se ve en el siguiente:.

Ejemplo 1.5

a) $4acb + 3cba + 2bac = 9abc$

b) $3a^2b + 3ab^2 - 2ab - 8ab^3 - 3a + 6b - 9b^3 + 5ba^2 + 6b^3a + ab^3 =$

$$
\begin{aligned}
&= 8a^2b + 3ab^2 - 2ab - ab^3 - 3a + 6b - 9b^3 \\
&= 8a^2b - ab^3 + 3ab^2 - 2ab - 3a + 6b - 9b^3 \\
&= 8a^2b - 3a - 2ab + 3ab^2 - ab^3 + 6b - 9b^3
\end{aligned}
$$

El resultado está ordenado en forma descendente con respecto a la literal "**a**".

El ordenamiento en forma descendente con respecto a "**b**" es:

$$= -9b^3 - ab^3 + 3ab^2 - 2ab + 8a^2b + 6b - 3a$$

c) $4a + 2b + 5 + 2a + 3b = 4a + 2a + 2b + 3b + 5$
$\quad = 6a + 5b + 5$

d) $6x + 7y - 12 - 8x + 4 + 2y = 6x - 8x + 7y + 2y - 12 + 4$
$\quad = -2x + 9y - 8$

e) $\frac{2}{3}m^2 - \frac{3}{7}n^3 + 2n + \frac{3}{5}m + \frac{3}{14}n^3 - \frac{5}{6}m^2 + 8m = \frac{4}{6}m^2 - \frac{5}{6}m^2 + \frac{3}{5}m + \frac{40}{5}m - \frac{6}{14}n^3 + \frac{3}{14}n^3 + 2n$
$\quad = -\frac{1}{6}m^2 + \frac{43}{5}m - \frac{3}{14}n^3 + 2n$

EJERCICIO 1.2

En cada uno de los ejercicios siguientes reducir los términos semejantes de las expresiones algebraicas dadas.

11. $2a^3 - 2a^2 + 2b^3$; $3a^2b - 4ab^2 - 4b^3$; $2ab^2 - a^3$
12. $4m^2 - 3mn + 2n^2$; $6mn - 2n^2 + 5$; $3n^2 - 3 - 2m^2$
13. $x^2 - 4xy + 3y^2$; $2x^2 + 2xy - 2y^2$; $2xy - y^2 - x^2$
14. $3x^3 - 8x^2 + 9x$; $-x^3 + 3x^2 - 8$; $2x^3 - 2x^2 - 7x + 5$
15. $c^2 + 2cd - 2d$; $3c - 2cd - 2d^2$; $-c^2 + 4d - 3c + 2d^2$
16. $\frac{2}{5}a + \frac{2}{7}b - \frac{4}{3}c$; $\frac{4}{5}a - 3b + \frac{2}{3}c$
17. $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x + \frac{11}{3}$; $\frac{x^2}{5} - x + \frac{2}{3}$
18. $\frac{2m^2}{3} - \frac{3mn}{2} + \frac{2n^2}{5}$; $\frac{7mn}{2} - \frac{2n^2}{3} + \frac{13mn}{2}$
19. $\frac{1}{4}x^3 - \frac{8x^2}{5} + \frac{1}{7}x$; $-\frac{x^3}{7} + x^2 - \frac{2x}{3}$
20. $\frac{5c^2}{7} + \frac{2cd}{5} - \frac{2d}{3}$; $\frac{c^2}{5} + \frac{4d}{7} - 3cd$

1.5 *Símbolos de agrupación.*

Al describir la ley asociativa de la suma usamos los símbolos de agrupación llamados: paréntesis ( ), corchete [ ] ó llaves { }. El propósito de estos símbolos es el de indicar que la expresión encerrada en ellos se debe considerar como un solo **término**.

Para suprimir los símbolos de agrupación de una expresión algebraica se procede en orden jerárquico, es decir primero se eliminan **( )**, a continuación **[ ]**, y finalmente **{ }**.

Ejemplo 1.6

$$
\begin{aligned}
& 3a - \{ a + 3a + [-4a + a +(5a -2a) + a] +2\} \\
= \; & 3a - \{ a + 3a + [-4a + a + 5a - 2a + a] +2\} \\
= \; & 3a - \{ a + 3a - 4a + a + 5a - 2a + a +2\} \\
= \; & 3a - a - 3a + 4a - a - 5a + 2a - a - 2 \\
= \; & -2a - 2
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 1.3

Suprima los símbolos de agrupación y reduzca los términos semejantes.

21. $2t - \{t + [t- (t + 5)] + 1\} =$
22. $x - \{ -x + [- x - (x - 1)] \} =$
23. $w - \{ x - z - [- (w - x) - z] - (x - w) \} + x =$
24. $3x^2 - \{ x - [x + (x^2 - 3)] - 5\} =$
25. $r^2 - \{ t + [2r - (-t + 2r)] + t \} + r^2 =$
26. $3x - [6 – 2x + (2 - 3x)] =$
27. $x - [3x + (4 - x)] - [8 - (x - 2)] =$
28. $3x - [y - (x - 2y)] - [2y - (x - 2y)] =$
29. $2x - [y + (1 - X)] - [1 - (y - 3x)] =$
30. $7 - 2 + [x + (2x - 1)] - [5 - (x + 3)] =$
31. $\frac{1}{3}a^3 + \left\{ b^4 - \frac{5}{7} - \left[\left(\frac{2}{5}a^3 - b^4 \right) + \left(b - \frac{5}{2} \right) \right] \right\} =$
32. $\frac{a}{3} + \left\{ -2b - \left[3 + \left(5a - \frac{7}{3}b \right) - \left(\frac{5}{4}a + 2 \right) \right] \right\} =$
33. $2a^3 - \left\{ 2b + \left[-\frac{5}{7} - \left(3a^3 - \frac{b}{2} \right) + \left(6a^2 - \frac{b}{3} \right) \right] \right\} =$
34. $\frac{5}{8} + \left(2a - b \right) - \frac{3}{7} - \left(x - \frac{3}{2} \right) =$
35. $4x - \left[9 - \frac{2}{5} - \left(3 - \frac{x}{2} \right) \right] =$

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se suprimen los símbolos de agrupación y se reducen los términos semejantes.

EJEMPLO 1.7

a) $$\begin{aligned}(a^3-b^4)-(a^3+b^4-4ab) &= a^3-b^4-a^3-b^4+4ab\\ &= -2b^4+4ab\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&(-3z^3+12y^2-4x+3)-(2z^3-11y^2+7)+(-6z^3+7x-2)=\\ &\qquad = -3z^3+12y^2-4x+3-2z^3+11y^2-7-6z^3+7x-2\\ &\qquad = -11z^3+23y^2+3x-6\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}x^2\right)+\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x\right)=\\ &\qquad =\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}+\frac{2}{6}x^2+\frac{5}{12}-\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x\\ &\qquad =\frac{7}{12}x-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.4

Suprima los símbolos de agrupación y reduzca los términos semejantes.

36. $(x^2-y^2)-(x^2+y^2-2xy)=$
37. $(a-b)-(a+b)+(b-a)-(b-2a)=$
38. $(x^2+5)+(2x-6)-\left[(x-4)+(-x^2+6)\right]=$
39. $(-m^3+8m^2-6m+5)-(m^2-7m+1)+(-16m^4+7m^2-3)=$
40. $(x^3-4x^2y+5y^3)-(-x^3+5x^2y-6xy^2+y^3)-(-6x^2y+9xy^2-16y^3)=$
41. $\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=$
42. $\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x^2\right)+\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x\right)=$
43. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}x-\frac{5}{4}x^2\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}x^2\right)=$
44. $\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}\right)=$
45. $\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{4}x\right)+\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x^2+\frac{2}{3}\right)=$

2. <u>Multiplicación de Polinomios</u>.

La multiplicación al igual que la adición, es una de las operaciones básicas del álgebra. Se observa que el signo de multiplicar (***x***), (*) o (•)

generalmente se omite cuando se utilizan letras. Es decir, a *x* b, a * b, a•b, (a)(b) y "ab" tienen el mismo significado.

2.1 Propiedades de los exponentes en la multiplicación.

Cuando se definió el término algebraico se habló del exponente, el que indica el número de veces que se repite la literal-base como factor:

$$n^5 = n \bullet n \bullet n \bullet n \bullet n$$

$$(3\ ab)^5 = (3ab)\ (3ab)\ (3ab)\ (3ab)\ (3ab)$$

El producto de dos potencias de la misma base se obtiene ***sumando*** los exponentes y conservando la base.

$$\left(a^m\right)\left(a^n\right) = a^{m+n}$$

Ejemplo 1.8

$(2^2)(2^3) = (2\bullet2)(2\bullet2\bullet2)$ por la definición de exponente.
$= (2\bullet2\bullet2\bullet2\bullet2)$ Por la propiedad asociativa de la multiplicación.
$= 2^5$

$(x^2)(x^3) = (x\bullet x)(x\bullet x\bullet x)$ por la definición de exponente.
$= (x\bullet x\bullet x\bullet x\bullet x)$ Por la propiedad asociativa de la multiplicación.
$= x^5$

$$(m^4)(m^2) = (m\bullet m\bullet m\bullet m)(m\bullet m)$$
$$= (m\bullet m\bullet m\bullet m\bullet m\bullet m)$$
$$= m^6.$$

Se observa que el exponente del resultado siempre es la ***suma*** de los exponentes de los factores.

El producto de dos o mas factores elevado a un exponente es igual a la ***multiplicación*** de las potencias de cada factor, elevado al mismo exponente.

$$\left(abc\right)^m = a^m b^m c^m$$

$$(2mn)^2 = (2mn)\ (2mn)$$
$$= (2)(2) \bullet(m)(m) \bullet(n)(n)$$
$$= 2^2 \bullet m^2 \bullet n^2$$
$$= 4 \bullet m^2 \bullet n^2$$

La potencia de una potencia es igual al ***producto*** de los exponentes.

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{nm}$$

$$\begin{aligned}(p^2)^3 &= (p^2)(p^2)(p^2)\\ &= (p \bullet p)(p \bullet p)(p \bullet p)\\ &= (p \bullet p \bullet p \bullet p \bullet p \bullet p)\\ &= p^6.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.9

a.
$$\begin{aligned}\left(a^2b^3\right)^4\left(a^4b^4c^4\right)^5 &= (a^{2*4}\ b^{3*4})\ (a^{4*5}\ b^{4*5}\ c^{4*5})\\ &= (a^8\ b^{12})\ (a^{20}\ b^{20}\ c^{20})\\ &= a^{28}\ b^{32}\ c^{20}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\left(x^5y^4z^3\right)^3\left(x^3y^4z^5\right)^4 &= \left(x^{5*3}\ y^{4*4}\ z^{3*3}\right)\left(x^{3*4}\ y^{4*4}\ z^{5*4}\right)\\ &= \left(x^{15}\ y^{16}\ z^{9}\right)\left(x^{12}\ y^{16}\ z^{20}\right)\\ &= x^{27}\ y^{32}\ z^{29}\end{aligned}$$

2.2 Producto de expresiones algebraicas

Para multiplicar un **monomio por otro monomio** se obtiene en orden el producto de:

a) Los signos
b) Los coeficientes (números)
c) Las partes literales (no olvidar las propiedades anteriores).

EJEMPLO 1.10

a) $(3\ a^2 b^3 c)(-2\ a^4 b^2 c^3 d^5) = (+)(-)(3)(2)\ a^2 a^4 b^3 b^2 c\, c^3 d^5$
$= 6\ a^6 b^5 c^4 d^5$

b)
$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{5}x^3y^2z^5\right)\left(-\frac{10}{7}x^3y^5z\right) &= (-)(-)\frac{(3)(10)}{(5)(7)}\ x^3x^3y^2y^5z^5z\\ &= \frac{6}{7}x^6y^7z^6\end{aligned}$$

El producto de **monomio por polinomio** se realiza haciendo uso de la propiedad distributiva en orden:

EJEMPLO 1.11

1) $(- 2\, a^4 b^2 c^3 d^5) (-3\, a\, b^3 + 5\, a\, c^2 d^3 - 2\, c^3 d^3 + a^2 c^2 d) =$
$6\, a^5 b^5 c^3 d^5 - 10\, a^5 b^2 c^3 d^8 - 2\, a^6 b^2 c^5 d^6$

2) $\left(-\frac{2}{3} a^2 b^3 \right) \left(\frac{6}{7} a^3 b^2 + \frac{5}{2} a^2 b^3 - \frac{4}{9} a b^4 \right) = -\frac{4}{7} a^5 b^5 - \frac{5}{3} a^4 b^6 - \frac{8}{27} a^3 b^7$

El producto de **polinomio por polinomio** se obtiene multiplicando cada uno de los términos del primer polinomio por todos y cada uno de los términos del segundo polinomio y es conveniente usar el arreglo vertical usado en la multiplicación aritmética, solo que el orden es de izquierda a derecha y los resultados se acomodan en columnas de términos semejantes y posteriormente se agrupan o suman los términos.

Ejemplo 1.12

$(a^2 - 2a + 2) (3a^2 - 2a + 3) =$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & -2a & +2 & \\
\text{por} & 3a^2 & -2a & +3 & \\
\hline
3a^4 & -6a^3 & +6a^2 & & \\
 & -2a^3 & +4a^2 & -4a & \\
 & & 3a^2 & -6a & +6 \\
\hline
3a^4 & -8a^3 & +13a^2 & -10a & +6
\end{array}
$$

EJERCICIO 1.4

En cada uno de los ejercicios siguientes encuentre el producto indicado:

46. $\left(\frac{3}{4} a^2 b \right) (-2ab^2)$
47. $x\, y^2 \,(x^2 - 2y + 4)$
48. $(a^2 + 2ab - 2b^2) \; (3a - 7b)$
49. $(- a\, b^2 c) (3a^2 b\, c) \; (2abc^2)$
50. $\left(\frac{3}{2} x^2 - 5y \right) (4x + 2y^2)$
51. $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x + y + z)$
52. $(2 + 3\, x^2 + x^3) (x^2 -1 + 4x)$
53. $(m^3 - m^2 + m - 1) (- m^3 + m^2 - m + 1)$
54. $(a^2 - ab + b^2 + a + b + 1) (a + b - 1)$
55. $(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a\, b^3 + b^4) (a - b)$

56. $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3\left(\frac{1}{4}x^3y\right)^2$
57. $-2a^2(-b^2)-a^2(-b)^3$
58. $(5ab)^2$
59. $(abc)^3$
60. $(3a)^3(-a^2)^3+a(-a^4)^2$

2.3 Productos notables

Se llama productos notables a ciertas multiplicaciones que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por ***simple inspección***, es decir, sin realizar la operación.

2.3.1 *Binomio al cuadrado*.

Elevar al cuadrado ***a + b*** equivale a multiplicar dos veces este binomio por sí mismo:

EJEMPLO 1.13

a) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ realizando la multiplicación se tiene:

$$\begin{array}{rr} & a+b \\ \text{por} & a+b \\ \hline & a^2+ab \\ & +ab+b^2 \\ \hline & a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Lo anterior traducido del lenguaje *algebraico* al *común*: *"el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera más el doble producto de la primera por la segunda más el cuadrado de la segunda".*

Nota: recuerda que la operación de suma incluye la adición y la sustracción.

b)
$$\begin{aligned}(2x^2+y)^2 &= (2x^2)^2+2(2x^2)(y)+(y)^2 \\ &= 4x^4+4x^2y+y^2\end{aligned}$$

EJERCICIO 1.5

Por simple inspeccion obtener el resultado de los siguientes binomios al cuadrado:

61. $(a+3)^2$
62. $\left(\frac{4}{7}+x\right)^2$
63. $\left(\frac{x}{8}+y\right)^2$
64. $(2x+3y)^2$
65. $\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{3}{5}b^4\right)^2$
66. $(x^2-2)^2$
67. $(2a-3b)^2$
68. $(10x^3-9xy^5)^2$
69. $(x^3-y^5)^2$
70. $(x^3-3x^2)^2$

2.3.2 *Binomios conjugados*.

EJEMPLO 1.14

Considere el producto de **(a + b)** y **(a – b)**, al efectuar esta multiplicación se obtiene:

$$\begin{array}{rrr} & a & + b \\ \text{por} & a & - b \\ \hline & a^2 & +ab \\ & & -ab - b^2 \\ \hline & a^2 & - b^2 \end{array}$$

Al generalizar, el producto se traduce del lenguaje algebraico al común como: "*el cuadrado del término que tiene el mismo signo (llamado idéntico), menos el cuadrado del que tiene signo diferente (llamado simétrico)".*

Al realizar las siguientes multiplicaciónes:

$$\begin{array}{rrr} & 3b+2a & \\ \text{por} & 2a-3b & \\ \hline & 6ab+4a^2 & \\ & -6ab & -9b^2 \\ \hline & 4a^2 & -9b^2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-3b-2a \\
\underline{\text{por } -2a+3b} \\
6ab+4a^2 \\
\underline{-6ab \qquad -9b^2} \\
+4a^2-9b^2
\end{array}
$$

Se observa que no importa el orden en el que aparezcan los términos de los binomios, en tanto sean los mismos y uno de ellos tenga el signo contrario en este caso ***+3b*** y ***–3b***.

EJERCICIO 1.6

71. $(x + y)(x - y)$
72. $\left(\frac{n}{2}-3\right)\left(\frac{n}{2}+3\right)$
73. $(a - x)(a + x)$
74. $(2a - 1)(2a + 1)$
75. $\left(\frac{3}{5}x^2-a^2\right)\left(\frac{3}{5}x^2+a^2\right)$
76. $(y^2 - 3y)(y^2 + 3y)$
77. $(1 - 8xy)(1 + 8xy)$
78. $\left(\frac{6x^2}{5}-\frac{m^2x}{3}\right)\left(\frac{6x^2}{5}-\frac{m^2x}{3}\right)$
79. $(a^2 + b^5)(a^2 - b^5)$
80. $(a^4 - 2b^3)(a^4 + 2b^3)$

2.3.3 *Binomio al Cubo*.

Elevar al cubo ***a + b*** equivale a multiplicar tres veces este binomio por sí mismo:

EJEMPLO 1.15

$(a + b)^3 = [(a + b)(a + b)](a + b)$ y realizando el producto se tiene:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \text{por } a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{por } a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Al generalizar, el producto traducido al lenguaje común: *el cubo de la suma de dos cantidades es igual a: "el cubo de la primera mas el triple producto del cuadrado de la primera por la segunda más el triple producto de la primera por el cuadrado de la segunda mas el cubo de la segunda".*

1) $$(2x^2 + y)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(y) + 3(2x^2)(y)^2 + (y)^3 = 8x^6 + 12x^4y + 6x^2y^2 + y^3.$$

2) $$(5m - 4n^2)^3 = (5m)^3 + 3(5m)^2(-4n^2) + 3(5m)(-4n^2)^2 + (-4n^2)^3 = 125m^3 - 300m^2n^2 + 240mn^4 - 16n^6.$$

EJERCICIO 1.7

Obtener el resultdo de los siguientes binomios al cubo:

81. $(a+1)^3$
82. $(4w^2 - 1)^3$
83. $\left(\frac{x}{2} - 3y\right)^3$
84. $(7a + 3b^3)^3$
85. $(4b^2 - 1)^3$
86. $(-11z^2 - 1)^3$
87. $(-2n + 3)^3$
88. $\left(-5xy - \frac{2z}{3}\right)^3$
89. $(x+5)^3$
90. $\left(\frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{2}\right)^3$

2.3.4 *Binomios con un término común*.

Al analizar el producto más general que resulta al multiplicar dos binomios con un término común:

EJEMPLO 1.16

$$
\begin{array}{rl}
 & ax + m \\
\text{por} & \underline{ax + n} \\
 & a^2x^2 + amx \\
 & \underline{\quad + anx \quad + mn} \\
 & a^2x^2 + (m+n)ax + mn
\end{array}
$$

De lo anterior se concluye que el resultado de multiplicar dos binomios que tienen un término común es: *el cuadrado del término común mas la suma algebraica de los términos no comunes por el común, más el producto de los no comunes.*

EJEMPLO 1.17

1) $(x+6)(x+10) = x^2 + (6+10)x + (6)(10)$
$= x^2 + 16x + 60$

2) $(5a+7)(5a-11) = (5a)^2 + (7-11)(5a) + (7)(-11)$
$= 25a^2 - 20a - 77$

3) $(2m-5n)(2m-7n) = (2m)^2 + (-5n-7n)(2m) + (-5n)(-7n)$
$= 4m^2 - 24mn + 35n^2$

EJERCICIO 1.8

91. $(x+7)(x+2)$

92. $(c^2-11)(c^2+12)$

93. $(a+8)(a-3)$

94. $(x^3y+2z)(x^3y-5z)$

95. $(y+6)(y-10)$

96. $(3a-4b)(3a-5b)$

97. $(w-8)(w-5)$

98. $(4m^2-1)(4m^2+9)$

99. $\left(\frac{b}{3}-9\right)\left(\frac{b}{3}-4\right)$

100. $(x-p)(x-q)$

101. $\left(\frac{z}{2}+1\right)\left(\frac{z}{2}-6\right)$

102. $(x^m y^n + 5)(x^m y^n - 7)$

103. $(6p+5)(6p-7)$

104. $(x^n+6)(x^n+7)$

105. $\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}-4\right)$

3. División de expresiones algebraicas.

La división se puede entender como la operación inversa de la multiplicación. Se *define* indirectamente por medio del siguiente:

Postulado: dados dos números cualesquiera ***a*** y ***c*** , ***c*** ≠ 0, existe un número ***b*** y solo uno tal que

$$ab = c$$

Este número ***b*** está dado por la igualdad:

$$b = \frac{c}{a} \qquad a \neq 0$$

EJEMPLO 1.18

$$5 \bullet 2 = 10 \qquad \text{de donde} \quad 2 = \frac{10}{5}$$

También se dice que ***b*** es el número al que hay que multiplicar por ***a*** para obtener el producto ***c***. Así se tiene:

$$a \bullet \frac{c}{a} = c \qquad a \neq 0$$

EJEMPLO 1.19

$$9 \bullet \frac{6}{9} = 6$$

Regla de los signos en la división.

El cociente de dos números es positivo o negativo según el dividendo y el divisor tengan signos iguales o diferentes; por o tanto:

$$b = \frac{c}{a} \qquad -b = \frac{-c}{a}$$

$$b = \frac{-c}{-a} \qquad -b = \frac{c}{-a}$$

$$-b = -\frac{c}{a}$$

3.1 *Propiedades de los exponentes en la división*

El cociente de dos cantidades elevado a un exponente es igual al cociente de las potencias de cada término, elevado al mismo exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$, *m* entero y positivo.

El cociente de dos potencias de la misma base se obtiene ***restando*** los exponentes, el del ***numerador*** menos el del ***denominador.***

Para toda a $\neq$ 0 y ***m*** y ***n*** enteros positivos tales que m **>** n, se tiene:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Si **a** y **b** son ambos diferentes de cero, **m**, **n**, **r** y **s** son números enteros positivos tales que **m > n** y **r > s**, entonces:

$$\frac{a^m b^r}{a^n b^s} = a^{m-n} b^{r-s}$$

3.2 *División de expresiones algebraicas*.

3.2.1 *Monomio entre monomio*.

Para dividir un monomio entre otro monomio, se realiza de la siguiente forma:

- Primero los signos
- Después los coeficientes (números)
- Y por ultimo las literales utilizando las propiedades de los exponentes en la división.

EJEMPLO 1.20

$$(24x^3y^2z^5)\div(8x^2yz^3)=\frac{24x^3y^2z^5}{8x^2yz^3}$$
$$=\frac{24}{8}\bullet\frac{x^3}{x^2}\bullet\frac{y^2}{y}\bullet\frac{z^5}{z^3}$$
$$=3x^{3-2}y^{2-1}z^{5-3}$$
$$=3xyz^2.$$

3.2.2 *Polinomio entre monomio*.

Para realizar esta operación se divide cada término del polinomio **dividendo** entre el monomio **divisor**, de acuerdo a lo señalado en el apartado 3.2.1.

EJEMPLO 1.21

$$(35a^4b^5c^3-20a^5b^4c^2+75a^3b^2c^4)\div(-5a^3b^2c^2)=\frac{35a^4b^5c^3-20a^5b^4c^2+75a^3b^2c^4}{-5a^3b^2c^2}$$
$$=\frac{35a^4b^5c^3}{-5a^3b^2c^2}-\frac{20a^5b^4c^2}{-5a^3b^2c^2}+\frac{75a^3b^2c^4}{-5a^3b^2c^2}$$
$$=-7a^{4-3}b^{5-2}c^{3-2}+4a^{5-3}b^{4-2}-15c^{4-2}$$
$$=-7ab^3c\ +\ 4a^2b^2\ -\ 15c^2$$

3.2.3 *Polinomio entre polinomio.*

El procedimiento (algoritmo) para dividir un polinomio por otro polinomio es:

1) Se ordenan los términos tanto del dividendo como del divisor con respecto a los exponentes de una de las literales, del de mayor magnitud al de menor magnitud (para los términos no existentes el coeficiente es cero).

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor (monomio entre monomio) y el resultado se escribe en el **cociente**.

3) Dicho resultado se multiplica por todos y cada uno de los términos del divisor y el producto resultante se resta del dividendo (esto es, cambio de signo).

4) Se repiten los pasos anteriores hasta que el término con exponente de mayor magnitud en el dividendo sea menor que el exponente de mayor magnitud del divisor, o el residuo sea cero.

EJEMPLO 1.22

$$(a^2 - 1 + b^2 + 2ab) \div (a + b - 1)$$

se ordenan los polinomios

$$\begin{array}{r|lllll}
 & a & +b & & +1 & \\
\hline
a + b - 1 & a^2 + 2ab & & +b^2 & & -1 \\
 & -a^2 - ab & +a & & & \\
\hline
 & ab & +a & +b^2 & & -1 \\
 & -ab & & -b^2 & +b & \\
\hline
 & & a & & +b & -1 \\
 & & -a & & -b & +1 \\
\hline
 & & & 0 & &
\end{array}$$

A continuación se muestra un ejemplo en donde el dividendo carece de algunos términos.

EJEMPLO 1.23

Dividir: (x^3+1) entre $(x+4)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x+1 & x^3 + 0x^2 + 0x + 4 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -x^2 \qquad + 4 \\
 & \qquad +x^2 + x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad x + 4 \\
 & \qquad\qquad -x - 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 3
\end{array}
$$

Para comprobar esta operación se multiplica el cociente por el divisor y al resultado se le suma el residuo, y el resultado debe ser el dividendo.

EJERCICIO 1.9

Realice las divisiones siguientes:

106. $(8 x^4y^3z^2) \div (- 4x^2y^2z)$
107. $(9 x^6y^4) \div (36 x^3y)$
108. $(- 6 m^5n^3) \div (30 m^6 n^6)$
109. $(8 x^3y^3z^3) \div (- 40 x^4y^5z^8)$
110. $(26 e^3f^5g^3) \div (39 e^5f^2g^5)$
111. $(-15 a^2 m^3 n^4) \div (- 5 am^2 n^2)$
112. $(4bx^3 - 8b^2x^2) \div (2bx^2)$
113. $(36 a^5b - 48a^4b) \div (12a^3b)$
114. $(2x^2 + xy - 6y^2) \div (x + 2y)$
115. $(x^3 - y^3) \div (x - y)$
116. $(3a^2 - 10ab + 3b^2) \div (3a - b)$
117. $(x + 2x^2 + 3x^3 + 4) \div (x^{2\,-} - x + 2)$
118. $(3a + 2a^3 - 4a^2 + 4a^4 - 17) \div (2a - 1)$
119. $(b^4 - a^3b - 2ab^3 + a^4) \div (ab + a^2 + b^2)$
120. $(w - 2w^{2\,+} w^3 - 6) \div (w - 2)$

3.2.4 *División sintética*.

Hay un método para efectuar rápidamente la división de un polinomio entre un binomio, ambos con, conocido como *división sintética.*

Condiciones:

- Dividendo y divisor deben tener una misma variable (literal).
- El binomio debe tener la forma (x – a), siendo "***a***" un número entero, observa que la literal tiene exponente y coeficiente uno y es positivo.
- El dividendo debe ordenarse en forma decreciente.

Se explica a continuación, partiendo de realizar como ejemplo la división del polinomio $3x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ entre $x - 2$. Por división algebraica ordinaria la operación es la siguiente:

EJEMPLO 1.24

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + 2x + 6 \\
\hline
x - 2 & 3x^3 - 4x^2 + 2x + 2 \\
 & \underline{-3x^3 + 6x^2} \\
 & \quad\;\; 2x^2 + 2x \\
 & \quad \underline{-2x^2 + 4x} \\
 & \qquad\quad\; +6x + 2 \\
 & \qquad\quad\; \underline{-6x + 12} \\
 & \qquad\qquad\quad 14
\end{array}
$$

Ahora se procede a abreviar el esquema anterior tanto como sea posible.

Ya que los polinomios se escriben ordenados de acuerdo con las potencias descendentes de ***x*,** se omite la parte literal y se conserva solamente sus coeficientes. Además, ya que el coeficiente de ***x*** en el divisor es la unidad, el primer término de cada de cada producto parcial es una repetición del término que está inmediatamente sobre él, por tanto es omitido, asi mismo el segundo término de cada residuo parcial es una repetición del término que está sobre él en el dividendo, es omitido, Por comodidad, se omite el primer término del divisor y se coloca el término constante a la derecha del dividendo. Además, ya que cada coeficiente del cociente, con excepción del primero, está representado por el primer coeficiente del residuo parcial resulta que todo el cociente puede omitirse. Con todas estas omisiones la división se reduce a lo siguiente:

EJEMPLO 1.25

$$
\begin{array}{l|l}
3 - 4 + 2 + 2 & \underline{\;2\;} \\
\underline{\quad 6 \quad} & \\
\underline{\qquad 2 \quad} & \\
\underline{\qquad 4 \quad} & \\
\underline{\qquad\; 2 \quad} & \\
\underline{\qquad\; 12 \quad} & \\
\qquad\; 14 &
\end{array}
$$

Lo anterior puede rescribirse ocupando menos espacio disponiendo del esquema en tres líneas y repitiendo el coeficiente principal en la tercera, tal como se muestra:

3	-4	+2	+2	+2
	6	+4	+12	
3	2	+6	14	

El cociente $3x^2 + 2x + 6$ se construye utilizando la tercera línea, y el residuo es el ultimo numero 14.

El algoritmo para realizar la división sintética es:

a).- El cociente es un polinomio con la misma variable que el dividendo y el divisor, cuyo grado es una unidad menor que el del dividendo.
b).- El coeficiente del primer término del cociente es igual al del primer término del dividendo (3).

c).- El coeficiente de los demás términos del cociente, se obtienen multiplicando el coeficiente del término anterior por el simétrico del número entero del divisor, (en este caso es $x - 2$ el simétrico es **+2**) y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

d).- El residuo (14) se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el simétrico del número entero del divisor, y sumando este producto con el término independiente del dividendo.

EJEMPLO 1.26

Hallar por división sintética, el cociente y el residuo de dividir $x^5 - 16x^3 - 202x + 81$ entre $x - 4$ (el simétrico es +4).

Como este polinomio es incompleto, ya que le faltan los términos en $\mathbf{x^4}$ y en $\mathbf{x^2}$, al escribir los coeficientes ponemos un **0** en los lugares que debían ocupar los coeficientes de estos términos.

Así se tiene:

1	+0	-16	+0	-202	+81	+ 4
	4	16	0	0	-808	
1	+4	0	0	-202	-727	
					(residuo)	

Como el dividendo es de 5^0 grado, el cociente es de 4^0 grado y los coeficientes de el son: 1, +4, $0x^2$, $0x$ y -202; por lo que el cociente es:

$$x^4 + 4x^3 - 202 \text{ y su residuo es } -727.$$

EJEMPLO 1.27

$$\frac{x^3+1}{x+1} =$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 0 & +1 & -1 \\
 & -1 & +1 & -1 & \\
\hline
1 & -1 & +1 & 0 &
\end{array}$$

El cociente es entonces $x^2 - x + 1$ y el residuo 0.

EJERCICIO 1.10

Utilizando la división sintética calcule el resultado de las siguientes operaciones:

116.- $x^2 - 7x + 5$ entre $x - 3$
117.- $x^3 - 2x^2 + x - 2$ entre $x - 2$
118.- $a^2 - 5a + 1$ entre $a + 2$
119.- $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 10x + 8$ entre $3x - 1$
120.- $x^3 - x^2 + 2x - 2$ entre $x + 1$
121.- $n^4 - 5n^3 + 4n - 48$ entre $n + 2$
122.- $x^5 - 183x^2 + 313$ entre $x - 5$
123.- $2x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ entre $2x - 1$
124.- $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 1852$ entre $x + 3$
125.- $3a^3 - 4a^2 + 5a + 6$ entre $3a + 2$